ALGEBRAÏSCHE VRAAGSTUKKEN

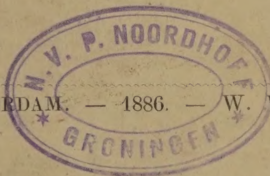
VOOR

EENIGSZINS GEVORDERDEN OF OUDERE LEERLINGEN,

VERZAMELD DOOR

J. VERSLUYS.

EERSTE STUKJE.



AMSTERDAM. — 1886. — W. VERSLUYS.

Prijs *f* 0,75.

ALGEBRAÏSCHE VRAAGSTUKKEN

VOOR

EENIGSZINS GEVORDERDEN OF OUDERE LEERLINGEN,

VERZAMELD DOOR

J. VERSLUYS.

EERSTE STUKJE.

AMSTERDAM. — 1886. — W. VERSLUYS.

VOORBERICHT.

Van de volgende vraagstukken zijn vele ontleend aan deel III mijner algebra, aan tijdschriften en aan buitenlandsche leerboeken. In dit geval heb ik meestal oudere werken genomen. Eenige bladzijden zijn geheel ontleend aan werken van den laatsten tijd.

Een deel der hier voorkomende vraagstukken zal worden opgelost in een afzonderlijk werkje over het oplossen van algebraïsche vraagstukken.

Jan. 1886.

HET VOORSTELLEN VAN GETALLEN DOOR LETTERS.

1. Bepaal de waarde van $\frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + ax + a^2}$ als $x = \frac{1}{2}$ en $a = \frac{1}{4}$.
2. Bepaal de waarde van $\frac{x - y}{x + y} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ als $x = \frac{3}{2}$ en $y = \frac{2}{3}$.
3. Van twee vazen is de eerste geheel gevuld met a liter water en de tweede geheel gevuld met b liter wijn. Door middel van twee evengroote maten neemt men uit elke vaas c liter en men giet wat uit de eerste vaas is genomen in de tweede en wat uit de tweede vaas is genomen in de eerste. Diezelfde verrichting wordt driemaal herhaald. Hoeveel water en hoeveel wijn is er daarna in iedere vaas?
4. Twee boden M en N doorloopen een rechte lijn SB

S A B

De eerste begint te bewegen van een punt A, dat a meter van S is verwijderd, en de tweede van een punt B, dat b meter van S is verwijderd. Zij bewegen zich beide in de richting van S naar B, de eerste met een snelheid van u meter in de minuut en de tweede met een snelheid van v meter in de minuut. Bepaal hoe groot na t minuten de afstand der boden zal zijn en hoever zij dan verwijderd zijn van het midden van AB.
5. Twee fabrieken van waskaarsen worden opgericht. De eerste wordt n dagen na de tweede geopend en gebruikt a arbeiders, die u uren per dag werken, terwijl de tweede a' arbeiders in het werk heeft, die u' uren per dag arbeiden. In hoeveel dagen na de opening der eerste fabriek zullen de twee fabrieken evenveel kaarsen vervaardigd hebben?

SAMENTELLING.

1. Tel samen $+\frac{2}{3}a, -\frac{1}{4}b, -\frac{2}{9}a, \frac{1}{2}c$ en $-\frac{1}{2}b$.
2. Herleid $+6a - \frac{2}{3}bc - 0{,}3g - 1{,}2a - bc + 4g + ac^2 - 4{,}7a - 0{,}4ac^2 - 3{,}7g$.
3. Schrijf zoo eenvoudig mogelijk
$+3a^2b - 5b^2 - 4\frac{2}{3} + 8b^2 - 7a^2b - 2a^2b - 7 + 4b^2 + 8{,}75$.
4.
$$\begin{array}{l} +\ 4ab + 2c \\ -12ab + 12c - 4d \\ -31ab - 16c + 5d - g. \\ \hline \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} +\frac{4}{9}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c + \frac{7}{9}d \\ \quad + 1\frac{1}{7}b + \frac{5}{6}c - \frac{2}{3}d \\ -\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}b - \frac{7}{12}c \\ \quad - \frac{4}{7}b + \frac{1}{4}c. \\ \hline \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} 8ax + 3bx - 12abx - 20xy + 18ay - 3z \\ 5ax - 4bx - 6abx + 12xy + 10ay - 40 \\ 3ax + 6bx + 9abx + 8xy - 8ay + 5z. \\ \hline \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} 40a^2 - 80ab + 40b^2 - 12a^2b^2 + mx - 15 \\ 12a^2 + 50ab - 20b^2 - 8a^2b^2 - nx + 24 \\ -25a^2 + 25ab - 12b^2 + 16a^2b^2 + 2mx - 8 \\ -18a^2 - 5ab + 6b^2 + 6a^2b^2 + 3nx - 1. \\ \hline \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} max^2 - na^p + 8a^2x^2 - 12ax^m - 40x^ny^m \\ -nax^2 + ma^p - 6a^2x^2 + 8ax^m + 24x^ny^m. \\ \hline \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} a^m - b^n + pa^mb^n + mx^3y + nx^2y^2 - 12xy^2z^2 \\ na^m + 2b^n - qa^mb^n + 2mx^3y - mx^2y^2 + 18xy^2. \\ \hline \end{array}$$

10. Bepaal de waarde van de som der volgende twee veeltermen voor $m = 4$, $n = 3$ en $x = a$
$$\begin{array}{l} (m+n)a^n - ma^{n-1}x + na^{n-2}x^2 - (m-n)ax^n + mx^m \\ (3m-n)a^n + ma^{n-1}x - 2ma^{n-2}x^2 - (2n-3m)ax^n - mx^n. \\ \hline \end{array}$$

Aftrekking.

1. $8x + (5x - 8a) + (8a - 3x) - 6x =$
2. $7a + (8a - 2) + (9 - 2a) - 10 =$
3. $(9x - 7y) + (2x + 3y) - (5x - 8y) =$
4. $(12x - 7y) - [a - (3x - 2y)] =$
5. $3c + 7 + [(4b - 2c) + (2c + 8)] =$
6. $8m - 5y + [(2y - 7m) + (3m - y)] =$
7. $(2x - 3y) + (2y - x) + [5x + (6y - 1)] =$
8. $7x - [(3a - 4x) - (5x - 1)] - (x - 2a + 2) =$
9. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c) =$
10. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] + [x - (n + p)] =$
11. $(a + b + c) + (a + b - c) + (a - b + c) + (b + c - a) =$
12. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c) =$
13. $(7m - 5x) - [(4n - 3x) - 4m + x)] - (2m - 3n + 4x) =$
14. $(a + 2b - 3) + [(2a - b) - (5b - 4) - (a - b)]$
    $- \{(4a + 3b) - [(7a - 2b) - (a - 3)]\} =$
15. $20 - 3x + 4x^2 - 5x^3 - (1 - 2x + x^2) - (3 - 2x - 4x^3) =$
16. Trek $(a - b)x + (c - d)y$ af van $(a + b)x + (c + d)y$.
17. $a - 2b - (3a - 5b) - (-2a + 7b - c) =$
18. $3a - 4b + 2c - (a - 3b + 2c) - (-a + 2b - 5c) =$
19. $3 - 5x + 7x^2 - 9x^3 - (1 + 2x + x^2) - (2 - 7x + 10x^2$
    $- 8x^3) =$
20. $x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 3x - 8$
    $- [8x^4 - 3x^2 - 13 - (x^5 - 3x^3 + 7x - 8)] =$

Voer de volgende aftrekkingen uit, zonder de haakjes te verdrijven.

21.
$$\begin{array}{l} (b + 5)x^4 - 7cx + \qquad 4x^2 + 12x \\ \underline{\quad 2bx^4 - 8x^3 + (3 - 4c)\ x^2 + \tfrac{1}{12}x.} \end{array}$$

22.
$$\begin{array}{l} x^3 + 3(a - b)x^2 + 3(a^2 - 2ab + b^2)x + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b \\ \underline{x^3 - 3(a + b)x^2 + 3(a^2 + 2ab + b^2)x - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3.} \end{array}$$

23.
$$\begin{array}{l} (7a + 2b)x + (3a - 2b)y - \qquad 4az \\ \underline{(5a - 3b)x + \qquad 4ay - (4a - 2b)z} \end{array}$$

24. Verminder de som der veeltermen

$$29x - 18y - 3a + 2b - 5$$
$$-14x + 22y - 6a - 5b + 8c + 15$$
$$-9x + 7y + 12a - 8b - 5c + 3$$
$$+12x - 3y - 5a + 21b + 17c - 9$$

met de som der volgende veeltermen

$$3a + 8b + 7c - 5$$
$$-5b + 8c + 7$$
$$2y - 6a + 3b - 2c - 6$$
$$3x - 5y - 8a + 6b - 9c - 8$$

zonder meer dan één optelling van veeltermen te verrichten.

25. Waaraan wordt $(B - E) - (A - F) + (D - C)$ gelijk, als men stelt

$$A = 2a - (3b - 2)$$
$$B = 3a - (2b - 1)$$
$$C = 1 - 2a$$
$$D = 2 - 3b$$
$$E = 3 - 2a \text{ en } F = 2 - b.$$

VERMENIGVULDIGING.

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen

1. $(x + 3)(x + 5) + (x + 5)(x + 4)$.
2. $(x - 5)(x + 3) + (x - 4)(x - 2)$.
3. $4(x + 3)(x - 3) + 7(x - 5)(x + 3)$.
4. $x(x + 1)(x + 2) + x(x - 1)(x - 2)$.
5. $x(x - 2)(x + 1) - x(x - 5)(x - 3)$.
6. $x(x + 3)(x - 5) - x(x - 3)(x + 5)$.
7. $2a^2 - b(3a - b) - \{a^2 - b(4a + b)\} + \{2b^2 - a(a - b)\}$.
8. $2a^2 - b(3a + b) - \{a^2 - b(4a - b)\} + \{2b^2 - a(a + b)\}$.
9. $\frac{1}{6}\{x(x + 1)(x + 2) + x(x - 1)(x - 2)\} + \frac{2}{3}x(x^2 - 1)$.

Verdrijf de haakjes en vereenig vervolgens de gelijksoortige termen in de volgende uitdrukkingen.

10. $3xy(x + y) + 3xy(x - y)$.

11. $2a(b - c) - 3b(a - c) + 4c(a - b)$.
12. $2\{b(x + y) + b(x - y)\}$.
13. $(a + b)^2 + (a - b)^2$.
14. $(a + b)^2 - (a - b)^2$.
15. $3\{b + \frac{1}{2}(a - b)\}$.
16. $6\{x - \frac{1}{2}(x - 1)\}$.
17. $ac(cx + dx) - (ad - bc)cx$.
18. $4a - 3\{a - 2(a - 1)\}$.
19. Breng binnen haakjes de coëfficienten van machten van x, y en z bij de volgende uitdrukkingen.

$$x^3 - rx^2 + sx^2 - tx^2 + rtx - rsx - stx + rst.$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 2bx + b^2 + x^2 - 2cx + c^2.$$
$$x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 + x^2 - 2cx + c^2.$$
$$m^2x^2 + 2mx + 1 - n^2x^2 - 2nx - 1.$$

20. Wat is de coefficient van x^5 in
$$(2x^4 + x^3 - x + 1)(x^3 - x + 1)$$
21. Bereken $(+ a^2 - 2a)(b + c^2)$ voor $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$ en $c = 4$.
22. Bereken $(+ a)(+ b - ab)^2 + \frac{nx}{m}$ voor $a = 3$, $b = 2, n = 5$, $m = 3$ en $x = 1$.
23. $(3a - 5b + 7c)(2a + 3b - 2d) =$
24. $(3 - 2x + x^2)(1 + x - 2x^2) =$
25. $(4 + 3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4)(2 - x - 3x^2) =$
26. $(1 + x - x^5 - x^6)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) =$
27. $(4 - 4x + x^2)(8 - 12x + 6x^2 - x^3) =$
28. $12x[\frac{1}{9}(12a - \frac{21}{2}ab + \frac{3}{4}b - \frac{2}{3}x) + \frac{1}{12}(14ab - 15a)] =$
29. $2\frac{1}{2}(m + n) - 2(\frac{1}{2}m - n) + 3(n - \frac{1}{2}m) - 4(\frac{1}{2}n - m) =$
30. $(x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 3x + 1)(x - 3) =$
31. $(2x^3 - 3x^2y - xy^2 + 4y^3)(x^2 - 4xy + 3y^2) =$
32. $(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) =$
33. $(3a - 4m + 3n - 2x)(2a - 3n + x)(2m - n - x)$
$\times (a + n + x) =$
34. $(x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 2)(x + 3)(2x - 1) =$
35. $(x^n - 3x^{n-1}y^r + 5x^{n-2}y^{2r} - 7x^{n-3}y^{3r} + 9x^{n-4}y^{4r})$
$(x^{n+3} - 2x^{n+2}y^{n-r} + 4x^{n+1}y^{n-2r} - 6x^ny^{n-3r}) =$
36. $(a^5v^4 + 3a^2v^{10} + a^7 - 7a^4v^6 - 5v^{14} - 5a^3v^8 - a^6v^2 - 7av^{12})$
$(a^3 - 2v^6 + 5av^4 - 3a^2v^2) =$

37. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen, zonder de haakjes te verdrijven.

$$x^2 + (a + b)x + ab + x^2 + (a - b)x - ab.$$
$$x^2 + (a - b)x - ab - x^2 + (a + b)x - ab.$$
$$(a + 5)x^2 - ay^2 + (b - 5)x^2 + 3ay^2.$$

38. Bewijs, dat een veelterm wordt vermenigvuldigd met het produkt van twee andere veeltermen, als men hem met een van die twee vermenigvuldigt en het komende produkt met den anderen veelterm.

39. Schrijf de uitkomsten der volgende vermenigvuldigingen rechtstreeks op.

$(x + 3a)(x - 3a).$ $(x + 4y)(x - 2y).$
$(x + 7y)(x - 7y).$ $(x - 3y)(x - 3y).$
$(a + 3b)(a + 3b).$ $(a - 5b)(a + 10b).$
$(a - 9b)(a - 8b).$ $(2x - 5)(x + 2).$
$(2x - 5)(x - 2).$ $(2x + 3)(x - 3).$
$(3x - 1)(x + 1).$ $(2x + 5)(2x - 1).$
$(3x + 7)(2x - 3).$ $(4x - 3)(2x + 3).$
$(3x + 8)(3x - 8).$ $(2x - 5)(2x - 5).$
$(3x - 2y)(3x + y).$ $(3x + 2y)(3x + 2y).$
$(2x + 7y)(2x - 5y).$ $(5x + 3a)(5x - 3a).$
$(2x - 5a)(x + 5a).$ $(2x + a)(2x + a).$

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:

40. $\{a[(13a + 12b)a - 11b^2] - 10b^3\} 3\frac{1}{3}ab.$

41. $\{mn[n^4(26n^2 - 21m^2) + m^4(16n^2 - 11m^2)]\} 4\frac{1}{2}m^3n^3.$

42. $\{3x(x^3 + y^3) + x^2y(5x + 3y) + y^2(3x^2 + y^2)\} 2x^3.$

43. $\left\{x^2\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + y^2\left(x - 2y\right)\right\} \left\{-\frac{xy}{4}\right\}.$

44. $7\{2x^3(3x^3 - 2y^3) - 4xy(2x^4 + y^4) + y^2(7x^4 + 5x^2y^2 + 3y^4)\} 3x^3y^3.$

45. $x\{yz[3\frac{4}{5}x^2 + yz(4\frac{5}{6}x + 5\frac{6}{7}yz)]\} 6\frac{7}{8}xy^2z^3.$

46. $y\{xy[y^2(y - 1\frac{2}{3}x) + x^2(2\frac{3}{4}y - 3\frac{4}{5}x)]\} 4\frac{5}{6}x^6y^5.$

---

47. Verricht de volgende samentelling

$$\begin{array}{r} 3(a+x)^3 - 4(a+x)^2 - (a+x), \\ -\ 5(a+x)^3 + 7(a+x)^2 + 4\,(a+x), \\ \underline{10(a+x)^3 - 9(a+x)^2 + 3\,(a+x).} \end{array}$$

48. Schrijf de produkten van de volgende twee veeltermen, die telkens in een rij staan, rechtstreeks op.

$x - y + z - 1,\ x + y + z + 1.$
$a - b + c - d,\ a - b - c + d.$
$x^2 + x - y^2 + y,\ x^2 + x + y^2 - y.$
$x^2 + ax + a^2,\ x^2 - ax + a^2.$
$a + 2b + 3c,\ a + 2b - 3c.$
$a + 2b + 3c,\ a - 2b + 3c.$
$a + 2b + 3c,\ a - 2b - 3c.$
$a - 2b + 3c,\ a - 2b - 3c.$
$a - 2b + 3c,\ a + 2b - 3c.$
$4a + 3b + 2c + d,\ 4a + 3b - 2c - d.$
$4a + 3b + 2c + d,\ 4a - 3b + 2c - d.$

49. Schrijf de volgende vormen als veeltermen, die gerangschikt zijn naar de opklimmende machten van x.

$ax^2 + 5x^3 - a^2x^4 - 2bx^3 - 3x^2 - bx^4.$
$7x^3 - 3c^2x - abx^5 + 5ax + 7x^5 - abcx^3.$
$ax^2 + a^2x^3 - bx^2 - 5x^2 - cx^3.$
$3b^2x^4 - bx - ax^4 - cx^4 - 5c^2x - 7x^4.$

50. Vermenigvuldig

$(5b + 6c)\ a + 4bc - d^2$ met $(5b - 6c)\ a + 4bc + d^2$.

51. Kan het verschil van 2 ongelijkslachtige veeltermen gelijkslachtig zijn.

52. Bewijs de volgende twee gelijkheden:

$2\,(a^2 + ab + b^2)^4 + 8a^2b^2\,(a+b)^2\,(a^2 + ab + b^2) = a^8 + b^8 + (a+b)^8$, en $(a^6 + 7a^3b^3 + b^6)^2 = (a^4 + 2ab^3)^3 + (b^4 + 2a^3b)^3 + (3a^2b^2)^3$.

53. Bewijs dat het gedurig produkt van drie gelijkslachtige veeltermen ook gelijkslachtig is.

54. Bepaal de 4 termen van den hoogsten graad van het gedurig produkt der vormen

$7 + 3x - 4x^2 - 5x^3 + 3x^4 - 2x^5,$
$3 - 2x - 4x^2 - 5x^3 - 6x^4$ en $1 + 3x$.

55. Bepaal de hoogste 5 termen van het produkt
$(1 - x^2 - x^4 - x^6 - x^8)^2 (1 + x + 2x^3 + 4x^5 + x^7)$.

56. Bepaal den vierden, zevenden en negenden term van het produkt
$(u^7 + u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)(u^7 - u^6 + u^5 - u^4 + u^3 - u^2)$.

57. Bepaal de laatste 4 termen van het produkt
$(2a^3x^2 - 5a^2x^4 + 3ax^6 - 2x^8)^2 (a^3 - 3a^2x^2 + 3ax^4 - x^6)^2$.

58. Bepaal den achtsten, negenden en tienden term van

$$(3 - 2x - 5x^2 + 7x^3 - 3x^4 + 4x^5)^3.$$

59. Vermenigvuldig den veelterm
$(a^2 - 2ab + b^2)x^3 + (2a^3 - 4b^3)x^2 + (-a^4 - a^2b^2 + b^4)x + 3a^2b^3 - 2ab^4$ met $(a - b)x^2 + (a^2 - ab - b^2)x - a^3 + b^3$

60. Bepaal de tweedemacht van

$$3x^4 - 4ax^3 - 5a^2x^2 + 2a^3x - a^4$$

61. Waarom bevat de tweedemacht van een veelterm minstens vier termen?

62. Bewijs dat men heeft

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp + cs - dr)^2 + (ar - cp + dq - bs)^2 + (as - dp + br - cq)^2$$

63. Welke eigenschap ligt in deze formule opgesloten ten aanzien van het produkt voor twee sommen ieder van vier tweedemachten?

64. Als men stelt

$$a + b + c + d = A$$
$$a + b - c - d = B$$
$$a - b + c - d = C$$
$$a - b - c + d = D$$

en men heeft $ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2)$, dan zal men tevens hebben $AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2)$. Bewijs dit.

65. Als men stelt $B = b^2 + bc + c^2$ en $C = b^2c + bc^2$, heeft men $4B^3 - 27C^2 = (b - c)^2 (2b^2 + 5bc + 2c^2)^2$. Bewijs dit.

66. Herleid $(a - b)(a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \dots\dots + b^m)$

67. Herleid $(a + b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \dots\dots - b^{m-1})$

68. $(x^{m+3} - 2x^{m+2}y + 3x^{m+1}y^2 - 4x^my^3)(x^2 + xy + y^2)$.

69. $(a^{4m} + 3a^{3m}b^n + 5a^{2m}b^{2n} + 7a^mb^{3n} + 9b^{4n})(a^m + b^n)$.

70. $(5a^4x^m - 7a^3bx^{m+1}y^n + 9a^2b^2x^{m+2}y^{2n} - 11ab^3x^{m+3}y^{3n} +$
$+ 13b^4x^{m+4}y^{4n})\ (3a^2x^3 + 2abx^4y^n + b^2x^5y^{2n})$.

71. $(\frac{1}{3}a^4y^8 - \frac{3}{5}a^3y^6 + \frac{5}{7}a^2y^4 - \frac{7}{9}ay^2 + \frac{9}{11})\ (\frac{1}{4}a^2y^4 - \frac{1}{3}ay^2 + \frac{1}{2})$.

72. $(4\frac{1}{3}m^5 + 5\frac{1}{4}m^4n - 6\frac{1}{5}m^3n^2 - 7\frac{1}{6}m^2n^3 + 8\frac{1}{7}mn^4 + 9\frac{1}{8}n^5)$.
$(3m^4n^3 + 4m^3n^4 + 5m^2n^5)$.

73. $(a^{m+6}b^{n+6} + \frac{1}{2}a^{m+4}b^{n+4} + \frac{1}{3}a^{m+2}b^{n+2} + \frac{1}{4}a^mb^n)$
$(a^{m+4}b^{n+4} + \frac{4}{5}a^{m+6}b^{n+6} + \frac{7}{8}a^{m+8}b^{n+8})$.

74. $(\frac{2}{5}a^xb^{y+4} - \frac{1}{2}a^{x+1}b^{y+3} + \frac{4}{7}a^{x+2}b^{y+2} - \frac{5}{8}a^{x+3}b^{y+1} + \frac{2}{3}a^{x+4}b^y)$
$(b^3 - 2ab^2 + 3a^2b - 4a^3)$.

DEELING VAN GEHEELE VORMEN.

1. Trek van $7x^6 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 2x + 21$ een veelterm af, die van zoo laag mogelijken graad is en een verschil oplevert, dat deelbaar is door $x^3 + x^2 - 2x + 5$.
2. Deel $4x^3 + 4x^2 - 29x + 21$ door $2x - 3$.
3. Deel $72a^4 - 78a^3b - 10a^2b^2 + 17ab^3 + 3b^4$ door $6x^2 - 4xy - y^2$.
4. Deel $a^2 - 3ab - c^2$ op $a^4 - 9a^2b^2 - 6abc^2 - c^4$.
5. Herleid $(32p^5 + q^5) : (2p + q)$.
6. Deel $12a^2 + (26b - 36c + 18)\,a - 10b^2 + 29bc - 6b - 21c^2 + 9c$ door $6a - 2b + 3c$.
7. Waaraan kan men terstond zien, dat de deeling van $4x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ door $x^2 - 2x - 7$ niet opgaat?
8. Deel $(a - b)x + a^2 - ab + b^2$ op den vorm $(a^2 - b^2)x^3 + 2a^3x^2 + (2a^4 - a^2b^2)\,x + a^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + b^5$.
9. Deel $(a + b)^3x^3 + 3(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3)x^2 + 3(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3)x + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ door den veelterm $(a + b)^2x^2 + 2(a^2 - b^2)x + a^2 - 2ab + b^2$.
10. Kan de deeling van een ongelijkslachtigen vorm door een gelijkslachtigen opgaan?
11. Bij een opgaande deeling is de hoogste exponent der rangletter in den deeler m, de hoogste exponent in het deeltal n, de laagste exponent in den deeler p, en de laagste in het deeltal q. Bepaal, hoeveel termen het quotient op zijn hoogst bevat.
12. Kan de deeling van een gelijkslachtigen vorm door een ongelijkslachtigen opgaan?

13. Bewijs, dat men deeler en deeltal met een zelfde positief of negatief getal mag vermenigvuldigen.

14. Waarom kan de deeling van een eenterm door een veelterm niet opgaan?

15. Kan een deeling opgaan, als deeler en deeltal van denzelfden graad zijn?

16. Deel $x^{m+1} - (m+1)x^m + 1$ door $x^2 - 2x + 1$.

17. Deel $a - (a-d)x - \{a + (m+1)d\}x^{m+1} + (a + md)x^{m+2}$ door $x^2 - 2x + 1$.

18. $[6a^2 - 8am - 3an - ax + 12mn - 9n^2 + 9nx - 4mx - 2x^2]$ $: [3a - 4m + 3n - 2x] =$

19. $[a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5] : [a^2 - 2ab^2 + b^2]$.

20. $[64x^6 - 192x^5y + 240x^4y^2 - 160x^3y^3 + 60x^2y^4 - 12xy^5 + y^6]$ $: [16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4] =$

21. $[16x^6 + 7x^4 - 2x^2 - 1] : [4x^3 + 3x^2 + 2x + 1] =$

22. $[1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 4x^4 - 12x^5 + 4x^6 - 4x^7 + 34x^8 - 46x^9$ $- 12x^{10} + 20x^{11} + 11x^{12} - 9x^{13} - 45x^{14} + 55x^{15}]$ $: [1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4 - 11x^5] =$

23. $[64x^{12} - 576x^{10}y + 2160x^8y^2 - 4320x^6y^3 + 4860x^4y^4$ $- 2916x^2y^5 + 729y^6] : [16x^8 - 96x^6y + 216x^4y^2 - 216x^2y^3$ $+ 81y^4 =$

24. $(64x^6 - 1) : (32x^5 - 16x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1) =$

25. $[a^{m-4}x^{m-2} + a^{m+2}x^m - a^mx^{m+2} - a^{n-2}x^{m+4}] : [a^mx$ $- a^{m-1}x^2 + a^{m-2}x^3 - a^{m-3}x^4] =$

26. $[1728a^{m-5}xb^{2n+3}c^{2p+3} - 1152a^{m-3}b^{2n+2}c^{2p+2}$ $+ 624a^{m-1}b^{2n+1}c^{2p+1} - 320a^{m+1}b^{2n}c^{2p} + 52a^{m+3}b^{2n-1}c^{2p-1}$ $- 8a^{m+5}b^{2n-2}c^{2p-2} + a^{m+7}b^{2n-3}c^{2p-3}] : [216a^{m-6}b^{n+3}c^{p+3}$ $- 36a^{m-4}b^{n+2}c^{p+2} + 6a^{m-2}b^{n+1}c^{p+1} - a^mb^nc^p] =$

27. Welke waarde moet men aan k geven, opdat de deeling van

$$a^4 + ka^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3 - b^4$$

door $a^2 - ab + b^2$ opga?

28. Onderzoek voor welke waarden van p en q de deeling van $x^4 + 1$ door $x^2 + px + q$ opgaat.

29. Waaraan kan men zien, dat de deeling van

$$(a + b - x)^m + x^m - a^m - b^m$$

door $(x - a)(x - b)$ steeds opgaat.

30. Voor welke waarden van m is

$$(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$$

steeds deelbaar door $(a+b)(b+c)(c+a)$?

31. Deel $2l^2x^2 - 2(3m-4n)(m-n)y^2 + lmxy$ door $lx + 2(m-n)y$.

32. " $(a^2+a-2)x^2 - (2a+1)xy - (a^2+a)y^2$ door $(a-1)x - ay$.

33. " $x^3 - (a-b-2)x^2 - (ab+2a-2b)x - 2ab$ door $(x-a)(x+2)$.

34. Deel $(x+1)^8 + 4(x+1)^6 + 6(x+1)^4 + 4(x+1)^2 + 1$ door $x^2 + 2x + 2$.

35. Deel $(m+1)(bx+an)b^2x^2 - (n+1)(mbx+a)a^2$ door $bx - a$.

36. Van een niet-opgaande deeling is de verhouding van deeler tot deeltal als $x+2$ tot $2x^2 - x + 3$. Als de som van quotient en rest $x^2 + x - 3$ is, wat is dan het deeltal?

37. Deel $x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ door $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

38. Deel $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ door den veelterm $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

39. Deel $x^{2n-2} + x^{2n-4} + x^{2n-6} +$ enz. $+ x^4 + x^2 + 1$ door $x^{n-1} - x^{n-2} +$ enz. $- x + 1$.

40. Wanneer is $x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} +$ enz. $+ x^4 + x^2 + 1$ deelbaar door $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} +$ enz. $+ x^2 + x + 1$?

41. Als bij een deeling de deeler $4p^3 - 3p + 5$ is, het quotient $-3p^2 + 6$ en de rest $-2p + 3$, wat zal dan de rest zijn, als men het deeltal vermenigvuldigt met $6p + 5$ en den deeler onveranderd laat?

EIGENSCHAPPEN DER GEHEELE VEELTERMEN; DEELBAARHEID, ENZ.

1. Door welk bekend getal moet men den coëfficient k vervangen in den drieterm $a^4 + ka^2b^2 + b^4$, opdat deze deelbaar zij door $a^2 - ab + b^2$?
2. Hoe kan men zonder rechtstreeksche deeling bewijzen, dat $x^5 \pm ax^4 + bx^3 \pm bx^2 + ax \pm 1$ deelbaar is door $x \pm 1$?
3. Bepaal de rest der deeling van $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ door $x - 2$, zonder de deeling uit te voeren.
4. Evenzoo als de deeler $x + 3$ is.

5. Bepaal de voorwaarde, die noodig en voldoende is, opdat $x^m - 1$ deelbaar zij door $x^n - 1$.
6. Evenzoo voor $p^m - q^m$ door $p^n - q^n$.
7. Bewijs, dat een veelterm, die nul wordt, als men voor x stelt 2, en ook, als men voor x stelt 3, deelbaar is door $(x - 2)(x - 3)$.
8. Bewijs, dat $x^p y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q$ deelbaar is door $(x - y)(y - z)(z - x)$.
9. Bewijs, dat, als n oneven is,
$$(p + q + r)^n - p^n - q^n - r^n$$
deelbaar is door $(p + q)(q + r)(r + p)$.
10. Als een geheele veelterm alleen de letter x en geen gebroken coëfficiënten bevat, en als hij oneven getallen oplevert, wanneer men voor x in de plaats stelt 0 of 1, dan kan die veelterm voor geen geheele waarde van x nul worden. Bewijs dit.
11. Stelt men in $ax^2 + 2bxy + cy^2$ voor x in de plaats $mx_1 + ny_1$ en voor y in de plaats $m_1x_1 + n_1y_1$, dan neemt de eerste vorm weer de gedaante
$$Ax_1{}^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1{}^2$$
aan. Bewijs, dat men daarbij heeft
$$B^2 - AC = (mn_1 - m_1n)^2 (b^2 - ac).$$
12. In welk geval is $x^m + a^n$ deelbaar door $x + a$?
13. Bewijs dat $x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r - x^p z^q y^r - y^p x^q z^r$ deelbaar is door $(x - y)(y - z)(z - x)$
14. Bewijs dat $1 - a - a^n + a^{n+1}$ deelbaar is door $1 - 2a + a^2$.
15. Laat zien dat $\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} + 1 = 0$, als $x^n + py^n + qz^n$ deelbaar is door $x^2 - (ay + bz)x + abyz$.

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN DER VERGELIJKINGEN.

1. Als de volgende vergelijking identiek is $-65 + (x - 5)(x^3 - 2x^2 - x - 16) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 11x + 15$ wat is dan het quotient der deeling van
$$x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 11x + 15 \text{ door } x - 5?$$

VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD.

1. $ax - 2b = 5bx - 3a$. 2. $a^2(x - a) + b^2(x - b) = abx$.
3. $x^2 + a^2 = (b - x)^2$. 4. $(x - a)(x + b) = (x - a + b)^2$.
5. $a(x - 2) + 2x = 6 + a$.
6. $m^2(m - x) - mnx = n^2(n + x)$.
7. $(a + x)(b + x) = x(x - c)$.
8. $(a - b)(x - a) = (a - c)(x - b)$.
9. $\frac{2x + 3a}{x + a} = \frac{2(3x + 2a)}{3x + a}$ 10. $\frac{2(x - b)}{3x - c} = \frac{2x + b}{3(x - c)}$.
11. $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$. 12. $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{a} + 1\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{a} - 1\right)$.
13. $\frac{a}{x} = c(a - b) + \frac{b}{x}$. 14. $\frac{9a}{b} - \frac{3x}{b} = \frac{4b}{a} - \frac{2x}{a}$.
15. $\frac{x - a}{b - x} = \frac{x - b}{a - x}$. 16. $\frac{x - a}{2} = \frac{(x - b)^2}{2x - a}$.
17. $\frac{1}{4}x(x - a) - \left(\frac{x + a}{2}\right)^2 = \frac{2a}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)$.
18. $(a + b)x^2 - a(bx + a^2) = bx(x - a) + ax(x - b)$.
19. $b(a + x) - (a + x)(b - x) = x^2 + \frac{bc^2}{a}$.
20. $b(a - x) - \frac{a}{b}(b + x)^2 + ab\left(\frac{x}{b} + 1\right)^2 = 0$.
21. $x^2 + a(2a - x) - \frac{3b^2}{4} = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + a^2$.
22. $(2x - a)\left(x + \frac{2a}{3}\right) = 4x\left(\frac{a}{3} - x\right) - \frac{1}{2}(a - 4x)(2a + 3x)$.
23. Van welke evenredigheid verschillen de 4 termen evenveel van de vier getallen 12, 18, 9 en 14?
24. Een getal is een veelvoud van 8 plus 6 en een veelvoud van 11 min 4. Als men dat getal door 8 deelt, zijn de geheelen van 't quotient 5 meer dan wanneer men het getal door 11 deelt. Welk getal wordt bedoeld?
25. Bepaal in den eenvoudigsten vorm de waarde van x als,

$$\frac{(2a + b)b^2}{a(a + b)^2}x + \frac{a^2b^2}{(a + b)^3} = 3cx + \frac{b}{a}x - \frac{3abc}{a + b}$$

26. Een waterbak, die vol is, kan door twee kranen A en B van ongelijke groote geledigd worden. Men opent de kraan A en laat een vierde van het water wegloopen. Vervolgens opent men de kraan B en men laat ze beide loopen. Op die wijze loopt ook het overige water weg en hiertoe is 5 kwartier meer noodig dan de eerste kraan noodig had om een vierde van het water te laten wegloopen. Als men de twee kranen van 't begin af had geopend, was de bak een kwartier vroeger geledigd geweest. Men vraagt hoeveel tijd de kraan A noodig heeft, om den bak alleen te ledigen?

27. Een vader verdeelt zijn nalatenschap op de volgende wijze onder zijn kinderen. De eerste krijgt een som a en het n-de deel van de rest. De tweede krijgt $2a$ en een n-de van wat er daarna overblijft. De derde krijgt eerst $3a$ en een n-de van wat er daarna overblijft. Enzoovoort. Ten slotte blijkt dat de geheele erfenis is verdeeld, en dat alle kinderen evenveel hebben gekregen. Hoe groot was de erfenis? Hoeveel kinderen waren er en hoeveel kreeg ieder?

28. Als aan de vergelijking

$$41 - 8(5 - x) = 4(2 - x) - 19$$

wordt voldaan door $x = -1$, schrijf dan terstond een vergelijking op, die zoo weinig mogelijk van de vorige verschilt en waaraan voldaan wordt door $x = +1$.

29. De oppervlakte van een trapezium, waarvan men de evenwijdige zijden B en b en de hoogte h kent, te berekenen door het te beschouwen als 't verschil der oppervlakken der twee driehoeken, die men krijgt, door de beenen van het trapezium te verlengen. Bespreking der uitkomst.

30. Twee vazen, wier inhoud v en v' is, bevatten ieder een mengsel water en wijn, de eerste in de verhouding van m tot n en de tweede in de verhouding van m' tot n'. Welken inhoud moeten twee onderling gelijke vazen hebben, opdat, wanneer men de eene vult uit de eerste vaas en de andere uit de tweede vaas en vervolgens in de eerste vaas giet wat uit de tweede is genomen en omgekeerd, de verhouding van het water tot den wijn dezelfde worde in de twee vazen.

31. Iemand plaatst zijn rijksdaalders op stapeltjes van 11 en houdt er dan 1 over. Vormt hij stapeltjes van 13 dan houdt hij 9 rijksdaalders over en krijgt hij 2 stapeltjes minder. Hoeveel rijksdaalders heeft hij?

32. n steenen liggen in een rechte lijn zóo dat de afstand van elke twee opeenvolgende steenen d is. Men vraagt om op die lijn een punt X te bepalen, zóo dat men tweemaal zooveel tijd noodig heeft om achtereenvolgens elken steen naar X te brengen als om alle steenen te brengen bij den eersten. — Men onderstelle dat men in elk geval uitgaat van den eersten steen.

33. Iemand belegde een som gelds in 4 percents effecten, waarvan de koers $86\frac{1}{4}$ was. Hij verkocht die effecten, toen ze op 90 stonden. Van de opbrengst nam hij f 360 af en het overige belegde hij in $4\frac{1}{2}$ percents effecten, die op $97\frac{7}{8}$ stonden. Als hij nu van deze laatste evenveel rente ontvangt als hij van de eerste effecten ontving, welke som heeft hij dan belegd in 4-percents effecten?

34. Een generaal wil een regiment van 1164 man in een carré plaatsen, waarvan het midden ledig is, zóo dat er op elke zij 3 rijen zijn. Hoeveel soldaten moet hij in de buitenste rijen plaatsen?

35. Een soldaat, die naar zijn garnizoen vertrekt, berekent dat hij a of b dagen te vroeg zal komen, al naar hij c of d kilometers per dag aflegt. Hoe ver is hij van zijn garnizoen verwijderd? Bespreking.

36. Eenige boomen zijn in de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek geplaatst, waarvan de omtrek p meters is. De tuinman verplant ze echter op een rechte lijn zóo dat de afstand van twee opeenvolgende boomen dezelfde blijft terwijl de afstand der buitenste twee boomen q meters wordt. Hoeveel boomen zijn er?

37. Een boerin, die met eieren ter markt gaat, verkoopt aan een eerste persoon een half ei meer dan de helft van haar eieren, aan een tweede persoon de helft der eieren, die zij overhield met nog een half ei; enz. en aan n-de persoon de helft der eieren, die zij overhield, met nog een

half ei. Als zij toen al haar eieren had verkocht, met hoeveel eieren was ze dan naar de markt gegaan?

VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD MET TWEE ONBEKENDEN.

1. $ax + by = l$
   $bx + ay = m.$

2. $lx + my = n$
   $px + qy = r.$

3. $ax = by$
   $bx + ay = c.$

4. $ax + by = a^2$
   $bx + ay = b^2.$

5. $x + ay = a'$
   $ax + a'y = 1.$

6. $px - qy = r$
   $rx - py = q.$

7. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{ab}$
   $\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = \frac{1}{a'b'}.$

8. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
   $bx + ay = 4ab.$

9. $\frac{3x}{a} + \frac{2y}{b} = 3$
   $\frac{9x}{a} - \frac{6y}{b} = 3$

10. $qx - rb = p(a - y)$
    $\frac{qx}{a} + r = p\left(1 + \frac{y}{b}\right).$

11. $\frac{x}{m} + \frac{y}{m'} = 1$
    $\frac{x}{m'} - \frac{y}{m} = 1.$

12. $px + qy = 0$
    $lx + my = n.$

13. $(a - b)x = (a + b)y$
    $x + y = c.$

14. $(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2$
    $(a + b)x - (a - b)y = 4ab.$

15. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
    $\frac{x}{3a} + \frac{y}{6b} = \frac{2}{3}.$

16. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
    $\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'}.$

17. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 1$
    $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{a}{b}.$

18. $\frac{m}{l}x + \frac{l}{m}y = \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}\right)(m^2 + l^2)$
    $(x + y)(m^2 + l^2) = 2(m^3 + l^3) + ml(x + y).$

19. $bx + cy = a + b$
    $ax\left(\frac{1}{a - b} - \frac{1}{a + b}\right) + cy\left(\frac{1}{b - a} - \frac{1}{b + a}\right) = \frac{2a}{a + b}.$

20. $(a - b)x + (a + b)y = 2(a^2 - b^2)$
    $ax - by = a^2 + b^2.$

21. Als $x + y = 2p$ en $x - y = 2q$, bewijs dan dat
$$x^4 - 23x^2y^2 + y^4 = (7p^2 - 3q^2)(7q^2 - 3p^2)$$

22. Los op het volgende stel vergelijkingen
$$(a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b)$$
$$a^2y - \frac{ab^2c}{a+b} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b)$$

23. Een getal van twee cijfers te vinden, dat aan de volgende voorwaarden voldoet. Telt men de som zijner cijfers op bij 9 zestienden van 't getal, dan krijgt men een getal dat uit dezelfde cijfers bestaat als het eerste getal. Met welk deel van 't getal moet men het verschil zijner cijfers vermenigvuldigen, om het produkt der cijfers tot uitkomst te krijgen?

24. Los x en z op uit de volgende vergelijkingen:
$$\frac{x}{a+b} + \frac{z}{a} = 2a, \quad \frac{x}{a-b} - \frac{z}{a+b} = b.$$

25. Als men uit de vergelijkingen $ax + bc = by + ac$ en $x + y = c$ vindt $x = ac : (a + b)$, schrijf dan rechtstreeks de waarde op, die men voor y zou vinden als men de vergelijkingen oploste.

26. Hoe moet men in de vergelijking
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$$
a en b uitdrukken in c opdat de vergelijking van den eersten graad wordt, en wat is dan de waarde van x?

VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD MET DRIE OF MEER ONBEKENDEN.

1. Los het volgende stel vergelijkingen op.
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} + 1 = 0.$$
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{12} + 1 = 0.$$
$$\frac{x}{9} + \frac{y}{12} + \frac{z}{15} + 1 = 0.$$

2. Los x, y en z op uit de volgende vergelijkingen

$$x - y + z = 0$$
$$(a + b)x - (a + c)y + (b + c)z = 0$$
$$abx - acy + bcz = 1.$$

3. $\frac{x}{bc} + \frac{y}{ac} + \frac{z}{ab} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

$b^2x - b = ab^2 - y$

$\frac{y}{bx + z} = \frac{b}{ab + c}$

4. $(c + a)x - (c - a)y = 2bc$

$(b + c)z - (b - c)x = 2ab$

$(a + b)y - (a - b)z = 2ac$

5. $\frac{(a - b)c}{z} + \frac{(c - a)b}{y} + \frac{(b - c)a}{x} = 0$

$\frac{c}{z} + \frac{b}{y} + \frac{a}{x} = a + b + c$

$\frac{c}{z} - \frac{b}{y} + \frac{a}{x} = 3b - (a + c)$

6. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $mx + ny + pz = r$.

7. Als men bij het oplossen der vergelijkingen

$$x + y + z = l$$
$$ax + by + cz = m$$
$$\frac{x}{l - a} + \frac{y}{l - b} + \frac{z}{l - c} = 1$$

vindt $x = \frac{(m - bc)(l - a)}{(a - b)(c - a)}$, zeg dan, zonder de vergelijkingen op te lossen, welke waarden men vindt voor y en z.

8. Welk verband moet er tusschen a, b en c bestaan, opdat aan de vergelijkingen

$$x = cy + bz$$
$$y = az + cx$$
$$z = bx + ay$$

voldaan worde door wortels, die van nul verschillen?

9. $\frac{x}{a}+\frac{y}{a-r}+\frac{z}{a-s}=1$
$\frac{x}{b}+\frac{y}{b-r}+\frac{z}{b-s}=1$
$\frac{x}{c}+\frac{y}{c-r}+\frac{z}{c-s}=1$

10. $\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c-a}=a+b$
$\frac{y}{a+c}+\frac{z}{a-b}=b+c$
$\frac{z}{a+b}+\frac{x}{b-c}=a+c$

11. $\frac{bx+ay}{c}=\frac{a-b}{(b-c)(a-c)}$
$\frac{cx+az}{b}=\frac{(a-c)}{(b-c)(a-b)}$
$\frac{cy+bz}{a}=\frac{b-c}{(a-c)(a-b)}$

12. $\frac{b-x}{b-m}+\frac{b'-y}{b'-m'}=1$
$\frac{b-x}{b-n}+\frac{b'-y}{b'-n'}=1$
$\frac{n-x}{n-m}+\frac{n'-y}{n'-m'}=1$

13. Als men bij het oplossen der vergelijkingen

$$ax+by+cz=1$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=1$$
$$a^3x+b^3y+c^3z=1$$

vindt $x=\frac{(b-1)(c-1)}{(a-b)(a-c)}$, zeg dan, zonder de vergelijkingen op te lossen, welke waarden men voor y en z zal vinden.

14. Geef 2 vergelijkingen met 3 onbekenden, zoodanig dat een van de onbekenden bepaald is.

15. Geef 3 vergelijkingen met 4 onbekenden, zoodanig dat 2 van de onbekenden bepaald zijn.

16. Als twee verg. van den eersten graad met 2 onbekenden afhankelijk zijn, wat weet gij dan van het stel, dat ontstaat, als men bij een der bekende termen 5 optelt.

17. Als de stralen van 2 cirkels en de afstand van hun middelpunten gegeven zijn, vraagt men den afstand te berekenen van een der middelpunten tot het punt, waarin de uitwendige gemeenschappelijke raaklijnen de rechte lijn ontmoeten, die door de 2 middelpunten gaat. (Antwoord: Noemen wij de stralen R en r en d den afstand der middelpunten. Zij x de afstand van het middelpunt van den cirkel r tot het genoemde ontmoetingspunt, dan vindt men $x=d\,R:(R-r)$. Bij de bespreking onderstelle men: 1°. $R>r$; 2°. $R=r$ benevens $d>0$; 3°. $r=R$ met $d=0$; 4°. $R<r$.)

18. Bepaal onder welke voorwaarde aan de vergelijkingen

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$
$$x = a'z + p'$$
$$y = b'z + q'$$

wordt voldaan door dezelfde waarden van x, y en z. Bepaal deze waarden.

19. Los x, y en z op uit de 4 vergelijkingen

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{l}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = m\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{y}{z}\right)$$

20. De 4 vergelijkingen met 3 onbekenden

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{l}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = m\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

zijn strijdig, als l en m ongelijk zijn, en de onbekenden zijn onbepaald, als l en m gelijk zijn. Bewijs dit.

21. Op te lossen

$$a^4 + a^3x + a^2y + az + u = 0$$
$$b^4 + b^3x + b^2y + bz + u = 0$$
$$c^4 + c^3x + c^2y + cz + u = 0$$
$$d^4 + d^3x + d^2y + dz + u = 0$$

22. Op te lossen

$$ax + k(y + z + u) = l$$
$$by + k(z + u + x) = m$$
$$cz + k(u + x + y) = n$$
$$du + k(x + y + z) = p$$

(Men bepale eerst de som der onbekenden.)

23. $a x_1 + b x_2 = c,$
$a_1 x_2 + b_1 x_3 = c_1,$
$a_2 x_3 + b_2 x_4 = c_2,$
$a_3 x_4 + b_3 x_5 = c_3,$
$a_4 x_5 + b_4 x_1 = c_4.$

24. $ax + b(y + z + v) = c,$
$ay + b_1(z + v + x) = c_1,$
$az + b_2(v + x + y) = c_2,$
$av + b_3(x + y + z) = c_3.$

25. Bereken de onbekenden uit: $x + y + z = v$
$av - bx - az = a^2$
$bv - bz - ay = b^2$
$cv - az - cy = c^2.$

26. Op te lossen: $u + v + \frac{1}{5}(x + y) = 8$
$x + y + \frac{1}{3}(u + v) = 6$
$v + x + \frac{1}{5}(u + y) = 6$
$u + y + \frac{1}{5}(v + x) = 6.$

27.
$$x + y + z + v = 1,$$
$$x + ay + bz + cu + dv = 0,$$
$$x + a^2y + b^2z + c^2u + d^2v = 0,$$
$$x + a^3y + b^3z + c^3u + d^3v = 0.$$

28. Een legeering, die p gram weegt, bestaat uit goud, zilver en koper en verliest in het water a gram aan gewicht. Als nu goud in 't water m percent aan gewicht verliest, zilver m' percent en koper m'' percent, hoeveel van elk der metalen is er dan in de legeering, als men weet, dat het verlies aan gewicht van 't koper, in de legeering aanwezig, tot dat van 't zilver, in de legeering aanwezig, zich verhoudt als 1 tot n.

29. n ossen hebben in t dagen het gras opgegeten van een weide, wier oppervlakte a is, benevens het gras, dat er in dien tijd eenparig bijgroeide. Van een andere weide, wier oppervlakte a' is, werd in t' dagen het gras met hetgeen er intusschen eenparig bijgroeide, opgegeten door n' ossen. Hoeveel ossen zullen noodig zijn om in Θ dagen het gras op te eten van een derde weide, wier oppervlakte α is, met het gras dat er intusschen eenparig bijgroeide. (Newton, Algemeene rekenkunde).

30. Hoe moet men in de vergelijking
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$$

a, b en c uitdrukken in d, opdat de vergelijking van den eersten graad worde?

31. Los het volgende stel vergelijkingen op
$$x + y + 2z = 4,\ x + 2y + 4z = 7,\ 3x + 4y + 8z = 15.$$

32. Los op
$$\begin{aligned} 1{,}2345x + 1{,}3579y + 8{,}642z - 9{,}765744 &= 0,\\ 7{,}447x + 5{,}225y - 6{,}336z - 0{,}611327 &= 0,\\ 1{,}5380x + 4{,}4444y - 5{,}6789z + 1{,}20011 &= 0.\end{aligned}$$

33. Los op
$$\begin{aligned} x + y + 2z + v &= 5\\ 2x + 3y + 2z + v &= 8\\ 3x - y + 4z + 2v &= 8\\ 6x - y + 2z - v &= 2.\end{aligned}$$

ONTBINDING IN FACTOREN.

1. Herleid de volgende vormen tot veeltermen en breng vervolgens zooveel mogelijk factoren buiten haakjes.
$(m - n) . (2a - 3b) - (4a - 2b) . (n - m) =$
$(a^2 + ab + b^2) . (a - b) + (a^2 - ab + b^2) . (a + b)$
$+ 2a^2(a - c) =$
$15a^2 + 24b^2 - (3a + 2b) . (5a + 6b) =$
$(2a - 3b) \times (a - b) - (5b - a) \times (b - a) + (a - 4b)$
$\times (a - b) =$
2. Welke eigenschap ligt opgesloten in de formule
$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr \pm qs)^2 + (qr \mp ps)^2$$
3. $x^6 + 16x^3 + 15.$
4. $x^4 - 14x^2 + 49.$
5. $x^4 - x^2 - 42.$
6. $12x^4 - 60x^2 - 288.$
7. $7x^4 + 14x^2 - 245.$
8. $(a + b)^2 + 7(a + b) + 12.$
9. $(a - b)^2 - 11(a - b) + 18.$
10. $(x + y)^2 - (x + y) - 2.$
11. $(x + y)^2 + 2(x + y)(a + b) + (a + b)^2.$
12. $(x - y)^2 - 6(x - y)(a - b) + 9(a - b)^2.$
13. $(x + y)^2 + 12(x + y)(a + b) + 35(a + b)^2.$

14. $x^2 - 169$.
15. $x^2 - 1$.
16. $4x^2 - 1$.
17. $9x^2 - 16y^2$.
18. $1 - 25a^2$.
19. $x^{2^n} - y^{2^n}$.
20. $12x^8 - 75$.
21. $180x^4 - 245$.
22. $(x+1)^2 - x^2$.
23. $(x+1)^2 - (x-1)^2$.
24. $a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2$.
25. $a^4 + 2a^3 + a^2 - b^4 + 2b^3 - b^2$.
26. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
27. $x^3 - y^3 - z^3 - 3xzy$.
28. $a^3 + b^3 + 1 - 3ab$.
29. $a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc$.
30. $a^3 - b^3 + 8c^3 + 6abc$.
31. $x^{3n} + y^{3p} + z^{3r} - 3x^n y^p z^r$
32. $(a+b)^3 + (c+d)^3 + (e+f)^3$
$- 3(a+b)(c+d)(e+f)$.
33. Indien $p+q+r=0$, is $p^3+q^3+r^3=3pqr$. Bewijs dit.
34. Ontbind de volgende vormen in factoren

$2x^2 - 22x + 56$.
$ax^2 - 11ax + 30a$.
$x^3 - 7x^2 - 120x$.
$x^2 + 17x^2 + 60x$.
$3x^3 - 30x^2 + 48x$.
$x^{2n} + 16x^n + 48$.
$x^n - 13x^{\frac{n}{2}} - 48$.
$x^2 + 60x + 891$.
$x^2 + 40x + 391$.
$x^2 - 8x - 384$.
$x^2 - 40x - 384$.
$x^2 - 40x + 375$.
$x^4 - 169x^2 + 3600$.
$x^4 - \frac{82}{9}x^2 + 1$.
$x^6 + 35x^3 + 216$.
$x^6 - 1000{,}001x^3 + 1$.

35. Ontbind $x^2 + 9x - 10$.
36. 〃 $a^2 + 2a - 99$.
37. 〃 $6p^2 + p - 1$.
38. 〃 $x^2 - x - 12$.
39. Deel $2x(x^2-1)(x+2)$ met behulp van de ontbinding in factoren door $x^2 + x - 2$.
40. Deel $5x(x^2-11)(x^2-x-156)$ door $x^3 + x^2 - 132x$.
41. Deel $x^6 + 19x^3 - 216$ door $(x^2 - 3x + 9)(x - 2)$.
42. Deel $a^9 - b^9$ door het produkt van $a^2 + ab + b^2$ en $a^6 + a^3b^3 + b^6$.
43. Deel $(x^3 - 3x^2y)^2 - (3xy^2 - y^3)^2$ door $(x-y)^3$.

44. Ontbind in factoren.
$(4a + 3b)^2 - (3a + 4b)^2$
$(2a - b)^2 - (a - 2b)^2$.
$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$.
$4a^2 - (a^2 + 1 - c^2)^2$.
$(x + y)^4 - (x - y)^4$.
$(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 3x - 4)^2$.
$x^3 - (y + 2)^3$

45. Bewijs dat $(p^2 + p + 1)^3 + (p^2 - p + 1)^3$ deelbaar is door $p^2 + 1$.

46. Ontbind in factoren
$a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
$a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.
$a^3 - b^3 + b(a - b)^2 - a(a^2 - b^2)$.
$a^2 - ab + 2(b^2 - ab) + 3(a^2 - b^2) - 4(a - b)^2$.
$5(a^2 - b^2) + 3(a + b)^2$.
$x^3 - 9x^2 + 9x - 1$.
$(3a - 2)^2 - (a - 3)^2$.
$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$.

47. Bewijs $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(xy - \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$.

48. Als $(a^2 + bc)^2 (b^2 + ac)^2 (c^2 + ab)^2 = (a^2 - bc)^2 (b^2 - ac)^2 (c^2 - ab)^2$, bewijs dan, dat

$$\text{òf } a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0,$$
$$\text{òf } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{abc} = 0.$$

49. Bewijs, dat $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ altijd positief is.

50. Laat zien, dat de tweedemacht van $x + 1$ deelbaar is op
$$(x^3 + x^2 + 4)^3 - (x^3 - 2x + 3)^3$$

51. Ontbind in factoren
$x^2 - 64$; $0{,}0001x^4 - 1$ en $x^{2n} - y^{2n}$.

Ontbind in factoren

52. $6x^2 + 12xy - 2y^2$.
53. $15x^2 - 19xy + 10y^2$.
54. $3x^2 - 10xy + 7y^2$.
55. $3(a + b)^2 - 10(a + b)y + 7y^2$.
56. $15(a + b)^2 + 14(a + b)(x + y) - 8(x + y)^2$.

57. $6x^2 + 7x + 2$.
58. $6x^2 + x - 2$.
59. $3x^2 + x - 2$.
60. $10x^2 - 17x + 3$.
61. $15x^2 + 14x - 8$.
62. $7x^2 - 50x + 7$.
63. $2x^2 - 3xy - 2y^2$.
64. Deel op de eenvoudigste wijze
$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ door $x^2 + 4x + 4$.
65. Deel $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$ door $x + a$.
66. " $x^3 - (a + b - c)x^2 + (ab - bc - ac)x + abc$ door $x - a$.
67. " $x^3 - (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x - a^2b$ door $x^2 - (a + b)x + ab$.
68. " $(x - 3)^2(x + 5)$ door $x^2 + 2x - 15$.
69. " $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 9x + 20)$ door $x^2 + 6x + 8$.
70. " $a^2 + 4b^2 + 1 + 4ab - 2a - 4b$ door $a + 2b - 1$.
71. " $(a + b)^2 + 11(a + b) + 28$ door $a + b + 7$.
72. " $(a + b)^2 - (a + b) - 20$ door $a + b + 4$.
73. " $(a - b)^2 - 15(a - b)c + 56c^2$ door $a - b - 8$.
74. " $(x + y)^3 + z^3$ door $(x + y)^2 - (x + y)z + z^2$.
75. " $x^3 - (y - z)^3$ door $x - y + z$.
76. " $(x + y)^3 + 3a(x + y)^2 + 3a^2(x + y) + a^3$ door $(x + y)^2 + 2a(x + y) + a^2$.
77. " $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ door $x + y + z$.
78. " $a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc$ door $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2ab - 3ac - 6bc$.
79. " $x^4 - 2a^2x^2 + a^4$ door $x^2 - 2ax + x^2$.
80. " $x^6 - 2x^3 + 1$ door $(x^2 + x + 1)^2$.
81. " $x^4 + 64$ door $x^2 + 4x + 8$.
82. Ontbind $a^2x^3 - \frac{8a^2}{y^3} - x^3 + \frac{8}{y^3}$ in vier factoren.
83. $x^4 + 16x^2 + 256$.
84. $81a^4 + 9a^2b^2 + b^4$.
85. $x^4 + y^4 - 7x^2y^2$.
86. $m^4 + n^4 - 18m^2n^2$.
87. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.
88. $4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2$.
89. $4m^4 + 9n^4 - 24m^2n^2$.
90. $9x^4 + 4y^4 + 11x^2y^2$.
91. $x^4 - 19x^2y^2 + 25y^4$.
92. $16a^4 + b^4 - 28a^2b^2$.

93. Deel $x^8 + x^4 + 1$ door $x^4 - x^2 + 1$.
94. " $a^4x^8 + a^2x^4 + 1$ door $a^2x^4 + ax^2 + 1$.
95. " $x^8 + a^2x^4 + a^4$ door $x^4 - ax^2 + a^2$.
96. " $x^8 + x^4 + 1$ door $(x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.
97. " $x^8 + x^4 + 1$ door $x^2 + x + 1$.
98. " $x^8 + x^4 + 1$ door $(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$.

Ontbind in 2 of meer factoren

99. $x^2y + 3xy^2 - 3x^3 - y^3$.
100. $ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2)$.
101. $a^3 + (a + b)ax + bx^2$.
102. $6bx(a^2 + 1) - a(4x^2 + 9b^2)$.
103. $(2x^2 - 3a^2)y + (2a^2 - 3y^2)x$.
104. $a(a - 1)x^2 + (2a^2 - 1)x + a(a + 1)$.
105. $3x^2 - (4a + 2b)x + a^2 + 2ab$.
106. $2a^2x^2 - 2(3b - 4c)(b - c)y^2 + abxy$.
107. $(a^2 - 3a + 2)x^2 + (2a^2 - 4a + 1)x + a(a - 1)$.
108. $a(a + 1)x^2 + (a + b)xy - b(b - 1)y^2$.
109. $b^3 + c^3 - 1 + 3bc$.
110. $a^3 + 8c^3 + 1 - 9ac$.
111. $a^3 + b^3 + 8c^3 - 6abc$.
112. $a^3 - 27b^3 + c^3 + 9abc$.
113. $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$.
114. $8a^3 + 27b^3 + c^3 - 18abc$.

115. Ontbind $x^8 + 81x^4 + 6561$ in 3 factoren.
116. " $(a^4 - 2a^2b^2 - b^4)^2 - 4a^4b^4$ in 4 factoren.
117. " $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$ in 4 factoren.

Ontbind in vier factoren

118. $\frac{a^3}{x^2} - 8x - a^3 + 8x^3$.
119. $x^9 + x^3y^6 - 8x^6y^3 - 8y^9$.
120. $x^9 + x^6 + 64x^3 + 64$.
121. $4a - 9b + \frac{4b^3}{a^2} - \frac{9a^3}{b^2}$.
122. $\frac{xy^3}{72} - \frac{x^3y^5}{32} - \frac{1}{9x^2} + \frac{y^2}{4}$.
123. $x^6 - 25x^2 + 6\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x^4$.

Ontbind in vijf factoren

124. $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16.$ 125. $16x^7 - 81x^3 - 16x^4 + 81.$

---

126. Bewijs dat $(3x^2 - 7x + 2)^3 - (x^2 - 8x + 8)^3$ deelbaar is door $2x - 3$ en door $x + 2$.

127. Bewijs dat

$$bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$$

door het eerste lid te herleiden tot het tweede.

128. Als $x^2 + u^2 = 2(xy + yz + zu - y^2 - z^2)$ bewijs dan, dat

$$x = y = z = u.$$

---

129. Bewijs de volgende identiteiten

$$b(x^3 + a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x + a) = (a + b)(x + a)(x^2 - ax + a^2).$$

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 + c^2x^2 + c^2y^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$(x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3 = (x + z)^3 + 3(x + z)^2y + 3(x + z)y^2 + y^3.$$

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = (a + b)(b + c)(c + a).$$

$$(a + b + c)^2 - a(b + c - a) - b(a + c - b) - c(a + b - c) = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$(x - y)^3 + (x + y)^3 + 3(x - y)^2(x + y) + 3(x + y)^2(x - y) = 8x^3.$$

$$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + (y - z)(z - x)(x - y) = 0.$$

$$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c).$$

---

130. Als $x + y + z = 0$, bewijs dan dat $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

131. Bewijs $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b)$.

---

132. Als $2s = a + b + c$, bewijs dan

$$(s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$(s - a)^3 + (s - b)^3 + (s - c)^3 + 3abc = s^3.$$

$$16s(s - a)(s - b)(s - c) = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

$$2(s - a)(s - b)(s - c) + a(s - b)(s - c) + b(s - c)(s - a) + c(s - a)(s - b) = abc.$$

---

133. Als $a + b + c = 0$, bewijs dan dat

$$(2a - b)^3 + (2b - c)^3 + (2c - a)^3 = 3(2a - b)(2b - c)(2c - a).$$

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} = 1.$$

---

134. Bewijs dat $(x + y + z)^3 + (x + y - z)^3 + (x - y + z)^3 + (x - y - z)^3 = 4x(x^2 + 3y^2 + 3z^2)$.

135. Als $a + b + c = s$, bewijs dan dat $(s - 3a)^3 + (s - 3b)^3 + (s - 3c)^3 - 3(s - 3a)(s - 3b)(s - 3c) = 0$.

136. Als $X = b + c - 2a, Y = c + a - 2b, Z = a + b - 2c$, bepaal dan de waarde van $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$.

137. Bepaal de waarde van $a(a^2 + bc) + b(b^2 + ac) - c(c^2 - ab)$ als $a = 0{,}7$, $b = 0{,}08$, $c = 0{,}78$.

138. Bewijs dat $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(c - b)(c - a) + 2(b - a)(b - c) + 2(a - b)(a - c)$.

139. Bewijs $a^2(b^3 - c^3) + b^2(c^3 - a^3) + c^2(a^3 - b^3)$

$$= (a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca)$$
$$= a^2(b - c)^3 + b^2(c - a)^3 + c^2(a - b)^3$$
$$= -[a^2b^2(a - b) + b^2c^2(b - c) + c^2a^2(c - a)].$$

140. Als $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + d)^2 = 4(ab + bc + cd)$ bewijs dan dat $a = b = c = d$.

141. Als $x = a + d, y = b + d, z = c + d$, bewijs dan dat $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$.

142. Als $a + b + c = 0$, bewijs dan dat

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0.$$

143. Als $a + b + c = 0$, vereenvoudig dan

$$\frac{b + c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c + a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{a + b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2).$$

144. Bewijs dat de vergelijking

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (a^2 + b^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

gelijk staat met de vergelijking

$$(ax + by - 1)^2 + (bx - ay)^2 = 0;$$

zoodat de eenige reëele waarden voor x en y zijn

$$\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

145. Als $2(x^2 + a^2 - ax)(y^2 + b^2 - by) = x^2y^2 + a^2b^2$, bewijs dan dat $(x - a)^2 (y - b)^2 + (bx - ay)^2 = 0$, zoodat $x = a$ en $y = b$ de eenige waarden zijn die voldoen.

DE GROOTSTE GEMEENE DEELER.

Bepaal den grootsten gemeenen deeler in elk der volgende gevallen.

1. $6(x^2 + 9x + 18)$, $9(x^2 + 3x - 18)$.
2. $14(x^2 + 3x - 108)$, $21(x^2 - 3x - 54)$.
3. $12(x^2 + 2x - 99)$, $18(x^2 + 12x + 11)$.
4. $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$.
5. $x^2 - (2a + 3c)x + 6ac$, $x^2 - 2(a - c)x - 4ac$.
6. $x^2 - (a + 3)x + 3a$, $x^2 - (3 - c)x - 3c$.
7. $x^2 - (a + 3)x - (a + 4)$, $x^2 - x(a + 4)$.
8. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$.
9. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$, $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.
10. $x^2 + 2xy + y^2 - a^2 - 2ab - b^2$, $x^2 + 2ax + a^2 - y^2 - 2by - b^2$.
11. $x^2 - 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2$, $x^2 - 2ax + a^2 - y^2 + 2by - b^2$.
12. $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$, $6x^3 + 6x^2 - 6x - 6$.
13. $x^3 - y^3$, $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$.
14. $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3$, $x^3 + y^3$.
15. $(x - 4)(x + 5)$, $(x + 5)(x - 6)$, $(x + 5)(x + 9)$.
16. $(x - 2)(x + 1)$, $(x + 1)^2$, $x^2 - 1$.
17. $x^2 + 9x + 14$, $x^2 + 3x + 2$.
18. $x^2 + 4x + 3$, $x^2 - 1$.
19. $x^2 - 5x + 4$, $x^2 + x - 2$.
20. $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - 6x + 5$.
21. $x^2 - x - 6$, $x^2 + 3x - 18$.

---

22. Zoek den grootsten gemeenen deeler der twee algebraïsche vormen:
$6x^5 + 15x^4y - 10x^2yz^2 - 4x^3z^2$ en
$9x^3y - 6xyz^2 - 27x^2yz + 18yz^2$.

23. Zoek den grootsten gemeenen deeler van:
$15x^2 - 16xy - 15y^2 - 29x - 31y - 14$ en
$9x^3 - 15x^2y - 15y^2 - 21x^2 - 12x + 9xy - y + 28$.

24. Zoek door deeling den grootsten gemeenen deeler van:
$4x^2 + 2xy - 2x - 20y^2 + 31y - 12$ en
$6x^3 + 19x^2y - 6x^2 - 22x + 10xy^2 + 7xy - 25y + 20$.

25. Zoek den grootsten gemeenen deeler van:
$6x^2 - 2xy + x - 20y^2 + 31y - 12$ en
$9x^3 + 21yx^2 - 3x^2 + 10y^2z + 7yx - 27x - 25y + 20$.

26. Wat is de ggd. van a^p en a^q?

27. Bepaal al de factoren, die gemeen zijn aan $9p^2q^3r$ en $15p^3qs^4$.

Bepaal den ggd. in elk der volgende gevallen.

28. $6x^4 - 25a^2x^2 - 9a^4$ en $9x^4 + 6a^2x^2 + a^4$.

29. $a^4 - x^4$ en $a^4 + a^3x - ax^3 - x^4$.

30. $20x^4 + x^2 - 1$ en $25x^4 + 5x^3 - x - 1$.

31. $a^4 - x^4$ en $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$.

32. $4a^2 - 9x^2$ en $8a^3 + 36a^2x + 54ax^2 + 27x^3$.

33. $9a^2 - b^2$ en $27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$.

---

34. Bepaal de enkelvormige en de samengestelde factoren, die gemeen zijn aan de volgende 2 vormen

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 \text{ en } x^3 - 4x^2 - 11x - 6.$$

35. Bepaal het aantal der deelers, die gemeen zijn aan

$$5(a - b)^3b^4c \text{ en } 7(a - b)^2(a + b)b^3c^4.$$

36. Bepaal bij de volgende vermenigvuldiging den ggd. der twee gedeeltelijke produkten.

$$\begin{array}{l} 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \\ 2x \quad + 1 \\ \hline 16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x \\ \qquad\quad + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \\ \hline 16x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 1 \end{array}$$

37. Bepaal den grootsten gemeene deeler van
$(m^2 - 3m + 2)x^2 + (2m^2 - 4m + 1)x + m(m - 1)$ en
$m(m - 1)x^2 + (2m^2 - 1)x + m(m + 1)$.

38. Van $mpx^3 + (mq - np)x^2 - (mr + nq)x + nr$ en
$max^3 - (mc + na)x^2 - (mb - nc)x + nb$.

39. Van $2ap^3 + (3a - 2b)p^2q + (a - 3b)pq^2 - bq^3$ en
$3ap^3 - (a + 3b)p^2q + (2a + b)pq^2 - 2bq^3$.

40. Van $acx^3 + (bc + ad)x^2 + (bd + ac)x + bc$ en
$2acx^3 + (2bc - ad)x^2 - (3ac + bd)x - 3bc$.

41. Als $x + a$ een gemeenschappelijke factor is van $x^2 + px + q$ en $x^2 + lx + m$, is $a = (m - q) : (l - p)$. Bewijs dit.

42. Bepaal de som der deelers, die gemeen zijn aan
$6(p - q)^3(p + q)p^2q^3$ en $9(p - q)^3(p + q)^3p^4q$.

43. Bepaal den ggd. van
$2a^2x^3 - (4b + 3)ax^2 + 2(3b - ac)x + 3c$ en
$2a^2x^3 + (2b - 3)ax^2 - (4ac + 3b)x + 6c$.

44. Van $2ax^3 + (4a^2 - 1)bx^2 - (2ab^2 + 3c)x - 6abc$ en
$ax^3 - (3 - 2a^2)bx^2 + (2c - 6ab^2)x + 4abc$.

45. Als $ax^2 - bx + c$ en $dx^3 - bx + c$ een factor gemeen hebben, is $a^3 - abd + cd^2 = 0$. Bewijs dit.

46. Voor welke waarden van x zijn teller en noemer van de volgende breuken gelijktijdig nul?

$$\frac{8x^2 - 6x - 9}{6x^3 - 17x^2 + 12x}. \qquad \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 8}.$$

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 16x + 16}{2x^3 + 12x^2 + 22x + 24}. \qquad \frac{6x^2 - 13x - 6}{9x^3 - 13x + 6}.$$

$$\frac{14x^2 - 34x + 12}{9x^2y - 39xy + 42y}. \qquad \frac{3x^2 + x - 4}{2x^3 - 3x^2 + 1}.$$

47. Bepaal bij de volgende vermenigvuldiging den ggd. der drie gedeeltelijke produkten:

$$\begin{array}{l}
2x^2 + xy + 2xz - 3yz - z^2 \\
x - y + 2z \\
\hline
2x^3 + x^2y + 2x^2z - 3xyz - xz^2 \\
\quad - 2x^2y \qquad - 2xyz \qquad - xy^2 + 3y^2z + yz^2 \\
\qquad 4x^2z + 2xyz + 4xz^2 \qquad - 6yz^2 - 2z^3 \\
\hline
2x^3 - x^2y + 6x^2z - 3xyz + 3xz^2 - xy^2 + 3y^2z - 5yz^2 - 2z^3.
\end{array}$$

48*. Zoek door deeling den grootsten gem. deeler van:
$6x\sqrt{x} + x + 4y\sqrt{x} - 10\sqrt{x} + 3xy + y^2 - 5y + 4$ en
$2x - 5y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 3y^2 + 4y - 1$.

49. Bepaal bij de volgende deeling den ggd. der drie aftrekkers

$$
\begin{array}{l}
x^2 + 2xa + 2a^2)x^4 + 4a^4 \qquad (x^2 - 2xa + 2a^2 \\
\qquad \underline{x^4 + 2x^3a + 2x^2a^2} \\
\qquad\quad - 2x^3a - 2x^2a^2 \\
\qquad\quad \underline{- 2x^3a - 4x^2a^2 - 4xa^3} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2a^2 + 4xa^3 + 4a^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2x^2a^2 + 4xa^3 + 4a^4}
\end{array}
$$

50. Als $x^3 + px + r$ en $3x^2 + p$ een factor gemeen hebben, is $\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}r^2 = 0$. Bewijs dit.

Bepaal den ggd. in elk der volgende gevallen:

51. $a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + a^3c + a^2bc + ab^2c + b^3c$ en $a^5 + b^5 + a^4c - a^3bc + a^2b^2c - ab^3c + b^4c$.

52. $4(c + d)x^4 + (4a + 4b + 3c + 3d)x^3 + (3a + 3b + 2c + 2d)x^2 + (2a + 2b + c + d)x + (a + b)$ en $4(c + d)x^4 + (4a + 4b - 3c - 3d)x^3 - (3a + 3b + 2c + 2d)x^2 - (2a + 2b + c + d)x - (a + b)$.

53. $x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ en $x^6 - 8x^4 - 8x^2 - 9$.

54. $3x^{2n} - 2x^{2n-2}y^{m-1}(5y - 3) + x^{2n-4}y^{m-2}(7y^3 - 5y^{m+1} - 3) - x^{2n-6}y^{m-3}(9y^5 - 7y^{m+3} - 5y^{m+1} + 3) - x^{2n-8}y^{2m-3}(9y^4 + 7y^2 - 5) + x^{2n-10}y^{2m-2}(9y^2 - 7) + 9x^{2n-12}y^{2m-1}$ en $3x^{n+1} - x^{n-1}y(5y^{m-1} - 3) + 2x^{n-3}y^2(y^{m-1} - 3) + 8x^{n-5}y^{m+2} - 23x^{n-7}y^{m+3} + 18x^{n-9}y^{m+4}$.

55. $52a^{3n}b^{r+2}x^5$, $286a^{2n}b^rx^4y^3$ en $390a^nb^{r+1}x^2z$.

56. $x^6 - 1$ en $x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$.

57. $ax^4 - (2a - b)x^3 + (3a - 2b - 2)x^2 + (3b + 4)x - 6$ en $a^2x^4 - b^2x^2 + 4bx - 4$.

58. $3a^3 - 3a^2(b-3) - 2ab^3(a - b + 3)x - (4ab^6 + 12b^6 - 4b^7)x^2$ en $(2ab + 6b - 2b^2)x^2 - (a^2 - b^2 + 3a + 3b)x + a^2 + 3a - ab$.

59. $12 - 18x - 26x^2 + 4x^3 - 2x^4 + 30x^5$ en $30x - 15x^2 + 5x^3 - 10x^4 - 10x^5 + 25x^6$.

60. Welke factoren van den eersten graad zijn gemeen aan de volgende twee veeltermen
$a^4 - a^3 - 4a^2 - 5a - 3$ en $2a^4 - 5a^3 - 2a^2 - a - 6$

61. Bepaal door deeling den grootsten gemeenen deeler van
$$2x^2 - 7xy + 15x + 6y^2 - 24y + 18$$
en $2x^3y + 6x^3 - 6x^2y - 3x^2y^2 + 9x^2 - 2xy - 6x + 3y^2 + 6y - 9$.

KLEINSTE GEMEENE VEELVOUD.

Bepaal het kgv. van de volgende vormen.

1. $4ab$; $5a^2b^2$; $6a^3bc$; $8a^2b^2cd$
2. $15a^2b(a^2 - b^2)$; $28ab^2(a - b)$; $63b^2c(a - b)^2$
3. $3ab(x - y)$; $5a^2b(x - y)^2$; $12a^3b^2(x^2 - y^2)$; $18a(x + y)$
4. $16x^2 - 1$; $x^2 - 9$; $x^2 - 6x + 9$
5. $28a^2b^2c(1 + x)^2$; $60ab^3c^2(1 - x^2)$; $63a^3bc^5(1 - x)^2$
6. $2a^2$; $5bc$; $8ab$; $20(a - b)x$
7. $5a^2 - 20b^4$; $a^2 + 4ab^2 + 4b^4$; $3a^2 - 12ab^2 + 12b^4$
8. $a^3 - a^2 - a + 1$ en $a^3 - a^2 + a - 1$
9. $a(x + 3)^2$, $a^2(x + 3)$, a^3.
10. $(a - x)^2$, $(a + b)(a - x)$, $(a + b)^2$.
11. $(a + b)^3$, $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $ax(a^2 - ab + b^2)$.
12. $(a - x)^2(b - y)$, $(b - y)^3$, $(a - x)(b - y)^2$.
13. $3(a - 1)$, $2(a - 1)^2$, $(a - 1)^3$.
14. $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 6x + 9$.
15. $x^2 + x - 2$, $x^2 - 2x + 1$.
16. $x^2 + x - 2$, $x^2 - 3x + 2$.
17. $x^2 + 2x - 120$, $x^2 - 2x - 80$.
18. $x^2 - 15x + 36$, $x^2 - 9x - 36$.
19. $x^2 - 9x + 14$, $x^2 - 11x + 8$.
20. $a^2 - x^2$; $a^2 - 2ax + x^2$ en $a^3 - x^3$.
21. $2x + 1$; $4x^2 - 1$ en $8x^3 + 1$.
22. $a^2 + x^2$; $a^4 - x^4$ en $a^4 + 2a^2x^2 + x^4$.
23. $x^2 - 1$; $x^2 - 16$ en $x^2 - 5x + 4$.
24. $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 9$ en $x^3 - 27$.
25. $4x^2 + 12x + 9$; $4x^2 - 9$ en $8x^3 + 27$.
26. $(x + a)^2$; $(x - a)^2$ en $x^3 + a^3$.

---

27. Zoek het kleinste gemeene veelvoud van:
$$10x^2 - 21x + 9,\ 6x^2 - 5x - 6 \text{ en } 3x^2 - x - 2.$$

28. Wat is het kgv. van m^p, m^q en m^r?

29. Van twee stelkundige vormen is de ggd. $6a^2bc^3$ en het kgv. $18a^3b^4c^5$. Bepaal het prodrukt van die twee vormen.

Bepaal het kgv. in de volgende gevallen

30. $x^2 - y^2,\ x^2 - xy + y^2,\ x^2 + xy + y^2.$

31. $(x - y)^3,\ x^3 - y^3.$

32. $(x + 3)^3,\ x^3 + 27.$

33. $(x - a)(a - b),\ (x - b)(b - a).$

34. $(a - b)(a - c),\ (b - a)(b - c),\ (c - a)(c - b).$

35. $abc,\ a(a - b)(a - c),\ b(b - a)(b - c).$

36. $(a - b)(a - c)(x - a),\ (b - a)(b - c)(x - b),\ (c - a)(c - b)(x - c).$

---

37. Bepaal bij de volgende deeling het kgv. der drie aftrekkers.

$$2 - 4a - 5a^2)10 - 16a - 39a^2 + 2a^3 + 15a^4(5 + 2a - 3a^2$$
$$10 - 20a - 25a^2$$
$$4a - 14a^2 + 2a^3$$
$$4a - 8a^2 - 10a^3$$
$$- 6a^2 + 12a^3 + 15a^4$$
$$- 6a^2 + 12a^3 + 15a^4$$

---

38. Bepaal het kgv. van elk der volgende gevallen $24a^mb^nx^4$, $60a^{2m}x^3$, $45b^{n-2}x^5$, $36x^2y^4$, $30a^{m-3}b^{n+2}x^3$ en $72a^{2m-4}xy^3z^2$.

39. $87a^{m+n}b^{n-p}$, $75a^mx^rz^3$, $319b^{2n}x^{r-3}$, $275x^{2r}y^4$, $725a^{m-n}b^{2n+p-1}z^4$ en $145a^{n-2}b^px^{r+2}y^5z^8$, als r grooter is dan 2.

40. $3x^3 - 5x^2 + 5x - 2,\ 2x^3 + x^2 - x + 3,\ 6x^3 - x^2 - 11x + 6.$

41. $x^3 - 5x^2 + 9x - 9,\ x^3 - x^2 - 9x + 9,\ x^4 - 4x^2 + 12x - 9.$

42. $2x^3 - 7x^2y + 13xy^2 - 5y^3,\ 3x^3 - 8x^2y + 12xy^2 + 5y^3.$

43. $2x^3 + x^2y - xy^2 + 3y^3,\ 4x^3 + 12x^2y + 11xy^2 + 3y^3.$

44. $(4x^2 - 1)$, $(2x^2 - 5x + 2)$, $(3x^2 + 7x + 2)$, $(x^2 + x - 6)$, $(3x^2 - 10x + 3)$, $(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$, $(x^2 - 4)$ en $(x^2 + 5x + 6)$.

45. $(x^2 - 1), (x^5 - 1), (x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1), (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1), (x^5 + 1), (x - 1), (x - 1)$ en $(x^6 + x^5 - x - 1)$.
46. $(x^n - 1), (x^{3n} + x^{2n} - x^n - 1), (x^n + 1), (x^{3n} - x^{2n} - x^n + 1), (x^{2n} - 1)$ en $(x^{2n} + 2x^n + 1)$.
47. $(x^4 + 4x^2 + 16), (x^2 - 2x + 4), (x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32), (x^3 + 8), (x^4 - 2x^3 + 8x - 16), (x^4 + 2x^3 - 8x - 16), (x - 2), (x^2 - 4), (x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$ en $(x + 2)$.
48. $2x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 36x - 35$ en $6x^3 - 5x^2 + 15x + 14$.
49. Van twee stelk. vormen is het produkt $27a^5b^6c\cdot(p - q)^3$, en het kgv. $9a^4b^5c(p - q)^3$. Bepaal den ggd. dier twee stelkundige vormen.

Bepaal het kgv. van de volgende vormen:

50. $x^4 - px^3 + (q - 1)x^2 + px - q$ en $x^4 - qx^3 + (p - 1)x^2 + qx - p$.
51. $p(p + 1)x^2 + x - p(p - 1)$ en $p(p + 2)x^2 + 2x - p^2 + 1$.
52. $(a^2 - 5a + 6)x^2 + 2(a - 1)x - a(a + 1)$ en $a(a - 3)x^2 + 12x - (a + 1)(a + 4)$.
53. $x^{2n+1} + x^{2n} + x^{2n-1} +$ enz. $+ x^2 + x + 1$, $x^{2n+1} - x^{2n} + x^{2n-1} -$ enz. $- x^2 + x - 1$.
54. $x^{2n-1} + x^{2n-2}y + x^{2n-3}y^2 +$ enz. $+ xy^{2n-2} + y^{2n-1}$, $x^{2n-1} - x^{2n-2}y + x^{2n-3}y^2 -$ enz. $+ xy^{2n-2} - y^{2n-1}$.

---

55. Bepaal bij de volgende vermenigvuldiging het kgv. van het produkt en de drie gedeeltelijke produkten.

$$\begin{array}{llllll}
x^2 & -2xy & +3y^2 & & & \\
x^2 & +2xy & -3y^2 & & & \\
\hline
x^4 & -2x^3y & +3x^2y^2 & & & \\
 & +2x^3y & -4x^2y^2 & +6xy^3 & & \\
 & & -3x^2y^2 & +6xy^3 & -9y^4 & \\
\hline
x^4 & & -4x^2y^2 & +12xy^3 & -9y^4 &
\end{array}$$

HERLEIDING VAN BREUKEN.

1. Vereenvoudig de volgende breuk
$$\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}.$$

2. $\dfrac{abx^2+a^2xy+aby^2+b^2xy}{abx^2+a^2xy-aby^2-b^2xy}$.

3. $\dfrac{1-x^7+7x(x-1)(1-x+x^2)^2}{(1-x)^7}$.

4. $\dfrac{(a+b+c)^2-(a-b-c)^2}{2a(b^2+2bc+c^2)}$.

5. $\dfrac{(a-c)(ac-b^2)+(b-c)(ab-c^2)}{(a-c)(a-b)+(b-c)^2}$.

6. $\dfrac{(2x-y-z)^2+(2y-z-x)^2+(2z-x-y)^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$.

7. $\dfrac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}$.

8. $\dfrac{(2y-z-x)^3-(2z-x-y)^3}{(z-x)^3-(x-y)^3}$.

9. Herleid de onechte breuk
$$\frac{6x^5-11x^4-9x^3+22x^2+3x-2}{3x^2+2x-1}$$
tot een gemengd algebraïsch getal.

10. Bepaal de waarde van $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2+2bc}$ als $a=4$, $b=0{,}5$ en $c=1$.

11. Welk verband moet er tusschen a, b, c en d bestaan, opdat $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ onafhankelijk zij van x?

12. Welk verband moet er tusschen a, b, c, d, e en f bestaan, opdat $\dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}$ onafhankelijk zij van x en van y?

13. Kan die breuk afhankelijk zijn van x en onafhankelijk van y?

14. Vereenvoudig de breuk
$$\frac{a^{m+x}+a^mb^y-a^xb^n-b^{m+y}}{a^xb^m+a^{n+x}+b^{m+y}+a^nb^y}$$

15. Laat zien dat

$$\frac{60x^3 - 17x^2 - 4x + 1}{5x^2 + 9x - 2} = 12x - 25 + \frac{49}{x+2}.$$

16. Vereenvoudig $\frac{1 + x^3}{1 + 2x + 2x^2 + x^3}$.

17. $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^5 - 10x^3 + 15x - 8}$. 18. $\frac{a^3 + a(1 + a)y + y^2}{a^4 - y^2}$.

19. $\frac{1 - (m + 1)x^m + mx^{m+1}}{(1 - x)^2}$.

20. $\frac{9x^3 + 53x^2 - 9x - 18}{x^2 + 11x + 30}$.

21. $\frac{2x^3 + x^2 - 8x + 5}{7x^2 - 12x + 5}$. 22. $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^3 - x^2 - 2x}$.

23. Tot welke waarde nadert $\frac{x^8 - 1}{x - 1}$, als x tot 1 nadert?

24. Tot welke waarde nadert de breuk

$$\frac{x^8 - 64}{x - 2}, \text{ als } x \text{ tot 2 nadert?}$$

25. Wat is de waarde, tot welke

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} \text{ nadert, als } x \text{ tot 1 nadert?}$$

26. Waartoe nadert $\frac{2a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab - 2b^2}$ als b tot a nadert?

27. Wanneer van eenige breuken $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots\ldots \frac{p_n}{q_n}$, de tellers willekeurig maar de noemers alle positief of alle negatief zijn, en men dan de som der tellers door de som der noemers deelt, waardoor de nieuwe breuk

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots p_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots q_n}$$

ontstaat, zal deze breuk grooter dan de kleinste en kleiner dan de grootste der gegeven breuken zijn. Bewijs dit.

(Men zie voor de wijze om dit vraagstuk op te lossen § 191 — § 193 van deel III mijner Rekenkunde).

Vereenvoudig de volgende breuken:

28. $\frac{a^3 - a^2b - ab^2 - 2b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3}$.

29. $\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2}$.

30. $\frac{a^3 + 2a^2 - 13a + 10}{a^3 + a^2 - 10a + 8}$.

31. $\frac{2x^3 + 5x^2y - 30xy^2 + 27y^3}{4x^3 + 5xy^2 - 21y^3}$.

32. $\frac{4a^3 + 12a^2b - ab^2 - 15b^3}{6a^3 + 13a^2b - 4ab^2 - 15b^3}$.

33. $\frac{1 + 2x^2 + x^3 + 2x^4}{1 + 3x^2 + 2x^3 + 3x^4}$.

34. $\frac{x^2 - 2x + 1}{3x^3 + 7x - 10}$.

35. $\frac{3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3}{4a^2 - 5ab + b^2}$.

36. $\frac{4x^3 + 3ax^2 + a^3}{x^4 + ax^3 + a^3x + a^4}$.

37. $\frac{4x^3 - 10x^2 + 4x + 2}{3x^4 - 2x^3 - 3x + 2}$.

38. $\frac{16x^4 - 72x^2a^2 + 81a^4}{4x^2 + 12ax + 9a^2}$.

39. $\frac{6x^3 + x^2 - 5x - 2}{6x^3 + 5x^2 - 3x - 2}$.

40. $\frac{5x^3 + 2x^2 - 15x - 6}{7x^3 - 4x^2 - 21x + 12}$.

41. $\frac{4x^4 + 11x^2 + 25}{4x^4 - 9x^2 + 30x - 25}$.

42. $\frac{3x^3 - 27ax^2 + 78a^2x - 72a^3}{2x^3 + 10ax^2 - 4a^2x - 48a^3}$.

43. $\frac{ax^3 - 5a^2x^2 - 99a^3x + 40a^4}{x^4 - 6ax^3 - 86a^2x^2 + 35a^3x}$.

---

44. Aan welke voorwaarden moeten de coëfficienten voldoen, zullen de waarden der volgende breuken onafhankelijk zijn van x en y.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}$$

$$\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f}{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}.$$

45. $\frac{9x^4 + 30x^2 + 25}{27x^6 + 135x^4 + 225x^2 + 125}$.

46. $\frac{175a^3 - 210a^2x + 63ax^2}{125a^3 - 225a^2x + 135ax^2 - 27x^3}$.

47. $\frac{x^2 + (a + b + c)x + (a + b)c}{a^2 + 2ab + b^2 - x^2}$.

48. $\frac{x^2 + (b - c - a)x - (b - c)a}{x^2 - b^2 + 2bc - c^2}$.

49. $\frac{ax^2 + (bc - ab - ac)x + abc - b^2c}{b^2c^2 - 2abc^2 + a^2c^2 - a^2x^2}$.

50. $\dfrac{x^3 - cx^2 - (ab - c^2)x - c^3 + abc}{c^4 - 2abc^2 + a^2b^2 - x^4}$.

51. $\dfrac{a^2bc - b^3c + 2b^2c^2 - bc^3}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$.

52. $\dfrac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}$.

53. $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$.

54. $\dfrac{10x^2 + (15a - 20b - 14c)x - 21ac + 28bc}{4x^2 - 9a^2 + 24ab - 16b^2}$.

55. $\dfrac{b^3x + 2abx^2 - bx^3 - a^2bx}{4a^2x^2 - (a^2 - b^2 + x^2)^2}$.

56. $\dfrac{4x^2 + (4b - 5c - 3a)2x - 3a(4b - 5c)}{4x^2 - 16b^2 + 40bc - 25c^2}$.

57. $\dfrac{x^3 + (2a + b)x^2 + (2b + a)ax - (b + x)y^2 + a^2b}{4a^2y^2 - (a^2 - x^2 + y^2)^2}$.

58. $\dfrac{3a^2 + 5a + 2}{3a + 3}$.

59. $\dfrac{6x^4 - 11x^2y - 10y^2}{21x^3 + 14xy}$.

60. $\dfrac{8x^4 - 8x^2 - 6}{10x^2 - 15}$.

61. $\dfrac{10a^2 - 29ax + 21x^2}{18a^3x - 27a^2x^2}$.

62. $\dfrac{x^5 + 2x^4y + 2x^3y^2 - xy^4 - y^5}{x^5 + 3x^4y + 5x^3y^2 + 2x^2y^3 - 2xy^4 - 3y^5}$.

63. $\dfrac{a^5 - a^4b + 2a^3b^2 - 6a^2b^3 + ab^4 - 21b^5}{a^6 - 3a^5b + 5a^4b^2 - 8a^3b^3 + 3a^2b^4 - 5ab^5 + 7b^6}$.

OPTELLING EN AFTREKKING VAN BREUKEN.

1. $\dfrac{a - 2b}{5x} + \dfrac{8bc + 15dx}{20cx} - \left(\dfrac{9d - 8c}{12c} + \dfrac{2 + 3c}{3}\right) =$

2. $\dfrac{m}{n} - \dfrac{m^2 - n}{mn} + \dfrac{n + 2}{m} - \dfrac{3}{m} =$

3. $\dfrac{1}{4x + 4} - \dfrac{2x}{x^2 + 3x + 2} + \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{x}{3x^2 - 12} + \dfrac{1}{x - 2} =$

4. $3 + x + \dfrac{2 - x}{3} =$

5. $\dfrac{x}{y} - \dfrac{2x}{3y} + \dfrac{7x}{5y} + \dfrac{4x}{y} - \dfrac{3x}{2y} =$

6. $\frac{4}{a^2} - \frac{5}{a^3} + \frac{2}{a} - \left(\frac{5}{a} - \frac{12}{a^2} + \frac{3}{4a^3}\right) =$

7. $\frac{16}{3(a+1)} + \frac{7}{5(a-1)} - \frac{4a-3}{(a+1)^2} =$

8. Als $\frac{a+b}{b} = \frac{b+c}{c} = \frac{c+a}{a}$, bewijs dan dat $a = b = c$.

9. Als $\frac{p}{b-c} = \frac{q}{c-a} = \frac{r}{a-b}$ is $p+q+r=0$. Bewijs dit.

10. $a - x + \frac{x^2}{a+x} =$

11. $1 - 2x + x^2 + \frac{1-x^4}{1+2x+x^2} =$

12. $am(a+m) - \frac{a^4m + am^4}{a^2 + 2am + m^2} =$

13. $a - m + n + \frac{am^2 + a^2m - an^2 - a^2n + mn^2 + m^2n}{a^2 - m^2 + n^2} =$

14. Voeg samen $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{b+1}$ en $\frac{1}{c+1}$ en laat zien, dat wanneer de som gelijk is aan 1, ook $abc = a+b+c+2$.

15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{x}{1+x+x^2}$.

16. $\frac{a}{b} - \frac{(a^2-b^2)x}{b^2} + \frac{a(a^2-b^2)x^2}{b^2(b+ax)}$.

17. $\frac{x(x+a)(x+2a)}{3a} - \frac{x(x+a)(2x+a)}{6a}$

18. $\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+2b}\right) - \frac{2}{a^2+ab-2b^2}$.

19. $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{4x}{x^2-x+1}$.

20. $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - 1 - \frac{1+x+x^2}{1-x^2} -$
$\frac{1-x+x^2}{1+x^2} + \frac{2x^2}{(1+x)(1+x^2)}$

21. $\frac{3+4x-2x^2}{20x+16x^2} + \frac{1-2x}{16x^2} - \frac{2-3x}{25} - \frac{1-2x+3x^2}{25x-20x^2}$
$- \frac{5 - 72{,}5x + 22x^2 - 48x^3}{625 - 400x^2}$

22. $\frac{5-3x}{2-3x}-\frac{4+2x-7x^2}{(2+3x)^2}+\frac{5-4x^2}{(2-3x)^2}+\frac{9-12x+15x^2}{4-9x^2}$

23. $\frac{1-2x}{(1+x)^n}+\frac{5(6x^3+2x-1)}{(1+x)^{n-1}}-\frac{5x}{(1+x)^{n-2}}+$
$\frac{2+3x}{(1+x)^{n-3}}+\frac{3(1-2x)}{(1+x)^{n-4}}$

24. $\frac{1+x^2+6x^3+4x^4}{x^3+2x^4+x^5}-\frac{1}{x+1}+\frac{1-2x-3x^2}{x^2+x^3}$

25. $\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+$
$\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=$

26. Als $a+b+c=2^3$, bewijs dan dat
$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

27. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

28. $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

29. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

30. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

31. $\frac{a(b+c)}{(a-b)(c-a)}+\frac{b(a+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(b-c)}$.

32. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

33. $\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ca}{b(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{ab}{c(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$.

34. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

35. $\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$.

36. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

37. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$.

38. $a^2\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^3\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$.

39. $\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$.

40. $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$.

41. $\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$.

42. $\frac{a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(c-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

43. $\frac{\frac{1}{a}(b-c)+\frac{1}{b}(c-a)+\frac{1}{c}(a-b)}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}$.

44. $\frac{a^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\frac{1}{bc}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{ca}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$.

45. Als $s=a+b+c+\ldots\ldots$ tot n termen, bewijs dan dat

$$\frac{s-a}{a}+\frac{s-b}{b}+\frac{s-c}{c}+\ldots=s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots\right)-n.$$

46. Als $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a-b}$, is $x-y+z=0$. Bewijs dit.

47. $\frac{1}{a^3+2a^2b+ab^2}-\frac{1}{a^2b-b^3}+\frac{1}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$-\frac{1}{a^3+a^2b}+\frac{1}{ab^2-b^3}-\frac{1}{a^2b-2ab^2+b^2+b^3}$.

48. $\frac{1}{a^3+2a^2b+ab^2}-\frac{1}{a^2b-b^3}+\frac{1}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$-\frac{1}{a^3+a^2b}+\frac{1}{ab^2-b^3}-\frac{1}{a^2b-2ab^2+b^3}$.

49. $\frac{1}{a^3+2a^2b+ab^2}-\frac{1}{a^2b-b^2}+\frac{1}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$-\frac{1}{a^3+a^2b}-\frac{a^3}{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$.

$$-\frac{b}{(a^2-2ab+b^2)^2}.$$

50. $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+7x+10}-\dfrac{x-1}{x+2}$.

51. $\dfrac{x^2-5ax+6a^2}{x^2-8ax+15a^2}-\dfrac{x-7a}{x-5a}$.

52. Als $s=a+b+c+\ldots$ tot n termen, bewijs dan dat

$$\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\ldots=n-1.$$

VERMENIGVULDIGING VAN BREUKEN.

1. Vermenigvuldig: $a-b+\dfrac{2b^2}{a+b}$ met $a-\dfrac{ab^2-b^3}{a^2+b^2}$.

2. Herleid $\dfrac{x^2-1}{y+1}\times\dfrac{y^2-1}{x^2+x}\times\left\{1+\dfrac{x}{1-x}\right\}$

3. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2-\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2$. 4. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\times\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\times\dfrac{4ab}{a-b}$.

5. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}\times\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}\times\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$.

6. Bepaal het vierkant van $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1$.

7. $$\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{ab+ac+bc}\times\frac{abc}{a^3+b^3+c^3-3abc}$$
$$\times\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}{a^2-b^2+c^2-2ac}.$$

8. Bewijs dat $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^6=a^6+\dfrac{1}{a^6}-6\left(a^4+\dfrac{1}{a^4}\right)$
$$+15\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-20.$$

9. $\dfrac{(x-a)\{x^2+(2+3a)x+6a\}}{(x-c)\{x^2+7ax+6a^2\}}\times\dfrac{x^2-a^2}{x^2+(2-c)x-2c}$.

10. $\dfrac{x^4-a^4}{x^6+a^6}\times\dfrac{x^3+a^3}{x^4-2a^2x^2+a^4}\times\dfrac{x^4-a^2x^2+a^4}{x^3-a^3}$.

11. $\dfrac{3x-1}{2x^2-11x+12}\times\dfrac{2x-3}{9x^2-9x+2}$.

12. $\frac{x^2 - 15x + 54}{x^2 - 7x + 10} \times \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 2x - 63} \times \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x}$.

13. $\left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)\left(\frac{x}{x - y} - 1\right) + \left(\frac{x^3}{y^3} - 1\right)\left(\frac{x^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} - 1\right)$.

14. $\frac{a^2 - ab}{a^3 - b^3} \times \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} + \left(\frac{2a^3}{a^3 + b^3} - 1\right)\left(1 - \frac{2ab}{a^2 + ab + b^2}\right)$.

15. Herleid $a + ab + b^2\left(a + ab + b^2\frac{a}{1 - b}\right)$.

16. Vermenigvuldig $\left(l + \frac{1}{l}\right)\left(l^2 + \frac{l}{l^2}\right)\left(l - \frac{1}{l}\right)$.

17. Herleid $\left\{\frac{a + b}{2(a - b)} - \frac{a - b}{2(a + b)} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\right\}\frac{a - b}{2b}$.

18. Bepaal de waarde van $\left(\frac{x - a}{x - b}\right)^3 - \frac{x - 2a + b}{x + a - 2b}$, als $x = \frac{a + b}{2}$.

19. $\left[4x + y\frac{8x - 45y}{5x - 2y}\right]\left[y - \frac{3y^2 + 5x^2}{2x + 3y}\right]\frac{1}{5x} =$

20. $\left[a + \frac{ab - 2}{a - b}\right]\left[a - \frac{ab - 2}{a + b}\right]\left[\frac{a - b}{a^2 - 2}\right] =$

21. $3y^2\left[\frac{5x}{2} - \frac{3y + 7\frac{1}{2}xy}{2x + 3y}\right]\frac{x}{2x - 3y} =$

22. $\frac{1}{ax}\left[\frac{2ax + 6}{5 - 3by} - 2\right]\left[5 + by\frac{5 - 3ax}{ax + by}\right] =$

23. $\left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{4x}{5y} + 2\right)\left(\frac{y}{x} + 3\right) =$

24. $\left(\frac{a}{c} + \frac{a^3}{b^2} + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{b^2}{acd} - \frac{b}{d} - \frac{b^2}{ad}\right) =$

25. $\left(\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - 1\right) =$

26. $\left[\frac{1 + x}{(1 - x)^2} - \frac{1 - x}{(1 + x)^2} - 6x\right] \times \left[1 + \frac{x}{4} + \frac{7}{1 + 2x} + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2} - \frac{16}{1 + 2x}\right] =$

27. $\left(x^2 - \frac{3x}{5} + 2\right)\left(\frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{3} + \frac{3x}{4}\right) =$

28. $\frac{7\frac{1}{2} - x}{\frac{5}{6} + x} \cdot \frac{4}{2x - 3} \cdot \frac{8\frac{3}{4} - 3x}{1 - \frac{4}{5}x} =$

29. $\left[\frac{2x^4 + 13a^2x^2 - 2a^3x - a^4}{(a^2 - x^2)^2} + \frac{a^2 + 5ax}{(a + x)^2}\right] \cdot \frac{a - x}{a + 2x} =$

30. $\left[\frac{1}{1 + x} + \frac{2x}{1 - x^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) =$

31. $\left[\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{(a - b)^3} - \frac{b}{a - b}\right] \cdot \left[\frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a}\right] =$

32. $\left[1 + \frac{a - b}{z} - \frac{(a - b)b}{z^2} + \frac{(a - b)b^2}{z^3} - \frac{(a - b)b^3}{(b + z)z^3}\right] \times$

$\left[\frac{a}{b} + \frac{(a - b)z^2}{b^2(b - z)}\right] =$

33. Als $m = \frac{x - y}{x + y}, p = \frac{y - z}{y + z}, q = \frac{z - u}{z + u}, r = \frac{u - v}{u + v}, s = \frac{v - w}{v + w}$

en $t = \frac{w - x}{w + x}$, vraagt men te bewijzen

$$(1 + m)(1 + p)(1 + q)(1 + r)(1 + s)(1 + t)$$
$$= (1 - m)(1 - p)(1 - q)(1 - r)(1 - s)(1 - t).$$

34. $\frac{(a + x)^n}{(b + y)^m} \cdot \frac{(b + y)^3}{(a + x)^2} =$ 35. $(a^m + b^n)^a \cdot (a^m - b^n)^a =$

36. $\left[\frac{a^m}{x^{n+2}} - \frac{a^{m+4}}{x^n} + \frac{a^{m+2}}{x^{n+1}}\right] \cdot \frac{x^n}{a^m} =$

37. $\left[\frac{x^n - 3}{3x^n - 2x^{n-2} - x^{n-4}} - \frac{x^4}{x^2 - 1}\right]\left(-\frac{x^{n-4}}{3}\right) =$

38. $\left[\frac{y^n + 2}{y^{2n} + 9y^n + 20} + \frac{y^{2n} + y^n + 1}{y^{2n} - 2y^n + 24}\right] \frac{y^{2n} - y^n - 30}{y^{3n} + 7y^{2n} + 2y^n - 7}.$

39. $\left(\frac{5}{2^5x^2} + \frac{14}{a^4x} + \frac{26}{a^3} + \frac{20x}{a^2} + \frac{13x^2}{a} + 6x^3\right)\left(\frac{a}{x^4} + \frac{a^2}{x^3} + \frac{a^3}{x^2}\right).$

40. $\left[\frac{a^m}{b^m} + \frac{2a^{m-2}}{b^{m-1}} + \frac{3a^{m-4}}{b^{m-2}} - \frac{4a^{m-6}}{b^{m-3}}\right]\left[\frac{a^4}{b^4} - \frac{2a^2}{b^3} + \frac{3}{b^2}\right].$

41. $\left[\frac{3}{5}\frac{x^{4m}}{y^{4n}} + \frac{5x^{3m}}{3y^{2n}} - 7x^{2m} + 3x^m y^{2n} + \frac{11}{5}y^{4n}\right]$
$\left[\frac{7}{6}\frac{1}{x^m} - \frac{5}{4}\frac{y^{2n}}{x^{2m}} + \frac{3}{2}\frac{y^{4n}}{x^{3m}}\right] =$

DEELING VAN BREUKEN.

1. Herleid $\frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} + \frac{3}{a+2} - \frac{\frac{4}{a}}{1+\frac{1}{a}}$.

2. $\left(\frac{21x^3}{5y^2} - \frac{15x^2}{7y^3}\right) : \frac{3x}{y} =$ $\qquad$ $\left(\frac{6a^{2m}}{b^{2n+2}} - \frac{10a^{m+2}}{b^{n+4}}\right) : \frac{2a^m}{b^n} =$

3. $\left(\frac{x}{y} + 1\right) : \left(\frac{y}{x} - 1\right) =$ $\qquad$ $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x}\right) : \left(\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a}\right) =$

4. $\left(\frac{3}{x} + \frac{x + \frac{12}{x}}{x - 4}\right) : \left(1 + \frac{5}{x-3}\right) =$

5. $\left[\frac{2}{3} + \frac{b(a+b)}{3(3a^2+7ab+4b^2)}\right] : \frac{a^2 - 5ab + 6b^2}{3a^2 - 5ab - 12b^2}$.

6. $\left(6\tfrac{1}{4}\,\frac{x^4y^2}{m^2n^6} - 9\frac{m^2p^2}{n^2q^2}\right) : \left(2\tfrac{1}{2}\frac{x^2y}{mn^3} + 3\frac{mp}{nq}\right)$.

7. $\left(16\frac{m^2}{n^4x^4y^2} - 2\tfrac{1}{4}\,\frac{n^2x^2y^6}{m^8}\right) : \left(4\frac{m}{n^2x^2y} + 1\tfrac{1}{2}\frac{nxy^3}{m^4}\right)$.

8. Herleid $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8y^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2y^2}{5}\right)$

9. $\left(\frac{x^2}{1-x^4} + \frac{2x^4}{1-x^8}\right) : \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$.

10. Vereenvoudig $\dfrac{\frac{a}{b} : c + \frac{b}{c} : a + \frac{c}{a} : b}{\frac{b}{a} : c + \frac{c}{b} : a + \frac{a}{c} : b}$ en laat zien dat deze uitdrukking gelijk is aan $\frac{s(s-a)+(s-b)(s-c)}{bc}$ als $2s = a+b+c$.

11. Als $\frac{a+b}{1-ab}=\frac{c+d}{cd-1}$, bewijs dan dat $\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=abcd.$

12. $\frac{6p^2q^2}{m+n}:\left\{\frac{3(m-n)p}{7(r+s)}:\left(\frac{4(r-s)}{21pq^2}:\frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right)\right\}$

te herleiden.

13. $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-x}}{1+\dfrac{1}{1-x}}.$

14. $\dfrac{\dfrac{1}{1+a}}{1-\dfrac{1}{1+a}}.$

15. $\dfrac{a+x-\dfrac{a^2+x^2}{a+x}}{a+x-\dfrac{2ax}{a+x}}.$

16. $\dfrac{x-5-\dfrac{x^2}{x+7}}{x+2-\dfrac{9x+14}{x+7}}.$

17. $\dfrac{a+x-\dfrac{a^3}{a^2-ax+x^2}}{a+x-\dfrac{x^3}{a^2-ax+x^2}}.$

18. $\dfrac{x-4-\dfrac{x^2-7x}{x-3}}{x+\dfrac{3x}{x-3}}.$

19. $\dfrac{\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{4a}{a+b}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{a+b}}.$

20. $\dfrac{\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}.$

21. $\dfrac{1-\dfrac{2b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}.$

22. $\dfrac{a^2+x^2+\dfrac{x^4}{a^2}}{1+\dfrac{x}{a}+\dfrac{x^2}{a^2}}.$

23. $\dfrac{1-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}{1+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}.$

24. $\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}{\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}.$

25. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+a}{x^2+a^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a+x}{a^2+x^2}}+\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-a}{x^2+a^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a-x}{a^2+x^2}}.$

26. $\left(\dfrac{a+x}{a^2-ax+x^2}-\dfrac{a-x}{a^2+ax+x^2}\right):\left(\dfrac{a^2+x^2}{a^3-x^3}-\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\right).$

27. $\dfrac{\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x-1}{x-2}}{\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{x+2}{x-3}}:\dfrac{\dfrac{x+3}{7}-\dfrac{x+3}{x+4}}{\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-2}{x-1}}.$

28. Deel $\dfrac{1-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}x-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{12}x^3+x^4}$ door

$$9-\dfrac{21-35x-7\frac{1}{2}x^2+18x^3}{\dfrac{4}{3x}+\dfrac{5}{3}-3x-\dfrac{5x^2}{6}+2x^2}$$

29. Deel $\dfrac{\frac{1}{6}x^n-\frac{5}{6}x^{n-1}+x^{n-2}}{\frac{1}{6}x^{r+1}-x^r+\frac{1}{2}x^{r-1}-3x^{r-2}}$ door

$$\dfrac{\frac{1}{2}x^r-2x^{r-1}}{\dfrac{x}{2}-3+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{9}{x^2}}-\dfrac{x^r}{x^2+x^3}$$

30. Laat zien, dat $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a:x}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a:x}}+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{a^2:x^2}}=\dfrac{4a^4}{a^4-x^4}.$

31. Vermenigvuldig $\dfrac{1}{1-\left\{\dfrac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right\}^2}$ met

$$\frac{(1+ab)\{1+ab+(a+b)x\}-(a+b)\{a+b+(1+ab)x\}}{\{1+ab+(a+b)x\}^2}.$$

32. Onderzoek of de volgende vergelijking identiek is

$$\frac{\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{c}{a+2b}}{\dfrac{c}{a+2b}-\dfrac{c}{a+3b}}=\frac{\dfrac{c}{a+b}}{\dfrac{c}{a+3b}}.$$

33. $\left(\dfrac{a+x}{b+y}\right)^n:\left(\dfrac{a+b}{x+y}\right)^n:\left(\dfrac{a+x}{a+b}\right)^n.$

34. $(a^2-4b^2)^5:(a-2b)^5.$ 35. $(x^2-\frac{1}{4})^m:(x+\frac{1}{2})^m.$

36. $(36x^2-25y^4)^3:(6x+5y^2)^3.$ 37. $(a^2+2a+1)^m:(a+1)^m.$

38. $(a^2-b^2)^n:(a+b)^n.$

39. $\left(\dfrac{2a^2+5ab+2b^2}{3a+4b}\right)^\alpha:\left[\dfrac{a(2a+b)}{3a+4b}\right]^\alpha.$

40. $\left(\frac{2a^2+3ab+b^2}{3a+b}\right)^5 : \left(\frac{2a+b}{3a-b}\right)^5 : \left(\frac{a+b}{3a+b}\right)^5.$

41. $\left[\frac{a^{2n}+b^{2n}}{a^n+b^n}+\frac{b^{2n}}{a^n-b^n}\right] : a^n(a^{2n}+b^{2n}).$

42. $(x^{m-2}+x^my^4+10x^{m+3}+8x^{m+4}y^{12}) :$
$: (x^{m-4}-2x^{m-3}y^2+4x^{m-2}y^4-6x^{m-1}y^6+8x^my^8).$

43. $[\frac{2}{3}a^2x^{n+5}+3\frac{14}{15}a^4x^{n+3}-10\frac{13}{45}a^6x^{n+1}+1\frac{2}{3}a^8x^{n-1}-$
$-1\frac{2}{3}a^{10}x^{n-3}] : [\frac{1}{3}ax^n+2a^3x^{n-2}-5a^5x^{n-4}].$

44. $\left[\frac{a^{m-6}}{x^3}+\frac{a^{m-2}}{x^5}+\frac{3a^m}{x^6}+\frac{11a^{m+4}}{x^8}+\frac{4a^{m+6}}{x^9}\right] :$
$: \left[a^{m-6}+\frac{2a^{m-4}}{x}+\frac{3a^{m-2}}{x^2}+\frac{4a^m}{x^3}\right].$

45. $\left[\frac{1}{15a^{5m}}-\frac{11x^n}{60a^{4m}}+\frac{157x^{2n}}{360a^{3m}}-\frac{7x^{3n}}{12a^{2m}}+\frac{7x^{4n}}{12a^m}-\frac{1}{2}x^{5n}\right] :$
$: \left[\frac{1}{5a^{3m}}-\frac{x^n}{4a^{2m}}+\frac{x^{2n}}{3a^m}-\frac{x^{3n}}{2}\right].$

46. $\left[\left(\frac{7x^2+6\frac{23}{24}ax}{45x^2-20a^2}-\frac{8\frac{2}{5}x^2-4\frac{17}{20}ax}{54x^2-72ax+24a^2}\right) :\right.$
$\left.\left(\frac{13\frac{53}{81}a^2-4\frac{5}{18}x^2}{135x^3-40a^3}-\frac{20\frac{2}{15}x-11\frac{379}{405}a}{18x^2-8a^2}+\frac{11}{9x+6a}\right)\right]$
$: \frac{(6ax+2a^2)^2+12a^4}{(5x-2\frac{2}{5}a)^3-\frac{2}{5}a^2(16x-34\frac{14}{25}a)}$

47. $\left(\frac{66\frac{74}{75}x-19{,}2a}{50a^2-20ax+2x^2}+\frac{8}{15a-3x}-\frac{4a+107\frac{13}{25}x}{75a^2-3x^2}\right)$
$: \frac{(10x^2-6ax)^2+20x^3(3a+5x)}{(5a-\frac{2}{3}x)^3-\frac{1}{9}x^2(15a-2\frac{2}{3}x)}$

48. $\left(\frac{3\frac{13}{45}x-6\frac{2}{15}a}{27a^2-18ax+3x^2}+\frac{5}{15a-5x}-\frac{3a+4\frac{23}{27}x}{45a^2-5x^2}\right)$
$: \frac{(3ax-4x^2)^2+x^3(12a-x)}{(3a^2-\frac{2}{3}ax)^3-\frac{1}{9}a^3x^2(9a-2\frac{2}{3}x)}$

49. $\left(\frac{18\frac{17}{40}x-13\frac{1}{5}a}{48a^2-120ax+75x^2}+\frac{7}{20a-25x}-\frac{3a+10\frac{23}{24}x}{80a^2-125x^2}\right)$
$: \frac{(3a-1\frac{1}{3}x)^3+x^2(59a+2\frac{10}{27}x)}{(8a-11x)^2x^2-x^3(21x-16a)}$

50. $$\left[\frac{x^5}{4y^{10}} - \frac{17x^4}{24y^8} + \frac{31x^3}{24y^6} - \frac{14x^2}{9y^4} + \frac{199x}{120y^2} - \frac{823}{480} + \frac{4411y^2}{2520x} - \right.$$
$$\left. - \frac{439y^4}{336x^2} + \frac{39y^6}{56x^3}\right] :$$
$$: \left[\frac{x^3}{2y^6} - \frac{3x^2}{4y^4} + \frac{5x}{6y^2} - \frac{7}{8} + \frac{9y^2}{10x} - \frac{11y^4}{12x^2} + \frac{13y^6}{14x^3}\right].$$

51. $$\left[x^p - 4\frac{x^{2p}}{a^n} + 7\frac{x^{3p}}{a^{2n}} - 9\frac{x^{4p}}{a^{3n}} + 11\frac{x^{5p}}{a^{4n}} - 2\frac{x^{6p}}{a^{5n}} - 9\frac{x^{7p}}{a^{6n}}\right] :$$
$$: \left[x^p - \frac{x^{2p}}{a^n} - \frac{x^{3p}}{a^{2n}}\right].$$

52. $$\left[\frac{x^{n+4}}{y^{n+4}} - \frac{x^{n+2}}{y^{n+3}} + \frac{x^n}{y^{n+2}} - \frac{x^{n-2}}{y^{n+1}} + \frac{x^{n-4}}{y^n} - \frac{x^{n-6}}{y^{n-1}}\right] :$$
$$: \left[\frac{x^n}{y^n} - \frac{x^{n-2}}{y^{n-1}} + \frac{x^{n-4}}{y^{n-2}} - \frac{x^{n-6}}{y^{n-3}}\right].$$

53. $$\left\{\left[\frac{390625m^8x^8}{6561n^8y^8} - \frac{256a^8}{6561b^8}\right] : \left[\frac{625m^4x^4}{81n^4y^4} + \frac{16a^4}{81b^4}\right]\right\} :$$
$$\left[\frac{25m^2x^2}{9n^2y^2} + \frac{4a^2}{9b^2}\right].$$

54. $$\left\{\left[\frac{1}{729x^{12}} - \frac{1}{1296x^8} - \frac{1}{2304x^4} + \frac{1}{4096}\right] : \left[\frac{1}{9x^4} + \frac{1}{16}\right]\right\} :$$
$$\left(\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{4}\right).$$

55. Bereken x uit elk der volgende vergelijkingen.

$a)$ $$\frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{32}{x + 12}}}} = 1, \quad b) \frac{1}{1 + \cfrac{1}{7 - \cfrac{24}{x + 3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}.$$

56. Bereken x en y uit de volgende 2 verg.

$$\frac{48 + 11y}{4x + 2} = \frac{16x^2 + 12xy - 8x + 5y + 28}{4x - 2} - (4x + 3y)$$

$$2x + 4 = \frac{8x^2 - 18y^2 + 108}{4x + 6y + 3} + 3y$$

57. $$\frac{\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}}{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{a-x}}.$$

58. $$\frac{\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^3+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^3}{\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}.$$

59. $$\frac{4a(a^2-a^2)}{3b(c^2-x^2)} : \left[\frac{a^2-ax}{bc+bx}\times\frac{a^2+2ax+x^2}{c^2-2cx+x^2}\right].$$

60. $$\left(x^2+6x-8-\frac{96}{x-6}\right) : \left(3x+12-\frac{2x^2}{x-6}\right).$$

61. Deel $x^6+\dfrac{1}{x^6}+x^4+\dfrac{1}{x^4}+x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ door den vorm

$$x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}.$$

62. $$\left(\frac{6x}{3x+4}+\frac{4}{3x-4}-\frac{16}{9x^2-16}\right) : \left(\frac{3x}{9x^2-16}+\frac{1}{3x+4}\right)$$

63. $$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{y}+x}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}\times\frac{x^2-y^2}{y^3-x^3}.$$

64. $$\frac{1}{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}.$$

65. $$\frac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}.$$

66. $$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}.$$

67. $$\frac{1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}.$$

68. $$\frac{x}{1+\dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x+x^2}}}.$$

69. $$\frac{x+2}{1-x+\dfrac{1}{2-x+\dfrac{3}{x}}}.$$

70. $$\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\frac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}.$$

71. $$\frac{ax+1+\dfrac{az}{yz+1}}{x-\dfrac{z}{yz+1}} : \left\{a+\frac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}\right\}$$

72. $$\frac{a+\dfrac{b}{1+\dfrac{a}{b}}}{a-\dfrac{b}{1-\dfrac{a}{b}}}(a^6-b^6).$$

73. Los x op uit $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{7(a+b)}{x-(2a+b)}}}}=\dfrac{1}{2}$

74. Los op $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2a-3}{x}-2}{a}-3}{4}}{}+5=\dfrac{17a}{4x}-\dfrac{3}{4ax}$

75. Los x en y op uit $21x+11y=207$, en
$\dfrac{5-7y+x}{6}-\dfrac{3x-y-7}{4}+\dfrac{5x-3y+4}{3x-4y+5}$
$=\dfrac{7+5y-4x}{3}-\dfrac{31y-9x-51}{12}$

76. Los x en y op uit $23x-27y=26$ en
$\dfrac{5x-3y+7}{9}-\dfrac{2y+7x-11}{12}-\dfrac{6x-5y+1}{6y-7x-8}$
$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{11x-5y+23}{18}-\dfrac{23x+8y-15}{36}$

77. Herleid $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}:\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

78. Vereenvoudig $\dfrac{\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{1}{a+y}+\dfrac{x}{(a-x)^2}-\dfrac{y}{(a-y)^2}}{\dfrac{1}{(a-y)(a-x)^2}-\dfrac{1}{(a-y)^2(a-x)}}$.

79. $\left\{\dfrac{x^4-a^4}{x^2-2ax+a^2}:\dfrac{x^2+ax}{x-a}\right\}\times\dfrac{x^5-a^2x^3}{x^3+a^3}:\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$.

80. $\dfrac{a^2-x^2}{a^2+ax+x^2}:\dfrac{\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^3\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^3}{a^3-x^3}$.

81. $\left\{\dfrac{b+\dfrac{a-b}{1+ab}}{1-\dfrac{(a-b)b}{1+ab}}-\dfrac{a-\dfrac{a-b}{1-ab}}{1-\dfrac{a(a-b)}{1-ab}}\right\}:\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$.

82. $\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{y}-x}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}} \times \dfrac{x^2-y^3}{x^3+y^3}$.   83. $\dfrac{2\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)}{2x+1}+\dfrac{1}{2}$.

84. $\left[\left(\dfrac{3x^2-2ax}{9x^2-16a^2}-\dfrac{11x^2-23ax}{9x^2-24ax+16a^2}+\dfrac{3x-a}{3x+4a}\right):\right.$
$\left.\left(\dfrac{1}{21x-28a}-\dfrac{2x+5a}{63x^2-112a^2}-\dfrac{2x^2-5ax}{27x^3+64a^3}\right)\right].$
$\left[\dfrac{(3x-4a)^3-4x^2(15x-62a)-16a^2(16x-3a)}{(x^2+21a^2)^2+2x^2(x^2-37ax+65a^2)-a^3(16x+441a)}\right.$
$\left.:\dfrac{(3ax+4a^2)^2-36a^3x}{15x^3-20ax^2}\right]$

85. $\left[\left(\dfrac{4x^2-8ax}{9x^2-16a^2}-\dfrac{17x^2-21ax}{9x^2-24ax+16a^2}+\dfrac{5x-2a}{3x+4a}\right):\right.$
$\left.\left(\dfrac{3}{21x-28a}-\dfrac{4x+9a}{63x^2-112a^2}-\dfrac{4x^2+5ax}{27x^3+64a^3}\right)\right].$
$\left[\dfrac{(5x-3a)^3-x^2(164x-199a)+a^2(49x+75a)}{(3x^2+46a^2)^2-3x^3(x+61a)-4a^2(8x^2+8ax+529a^2)}\right.$
$\left.:\dfrac{(3ax+4a^2)^2-36a^3x}{12x^3-16ax^2}\right]$

Los de 2 onbekenden op uit elk der volgende stellen vergelijkingen:

86. $\dfrac{84+72y}{1-y}-72+\dfrac{432x-125}{3x+5}=0$
$\dfrac{30-198y}{3y-1}+\dfrac{121-231x}{1-x}=165$

87. $2+6x+9y=\dfrac{27y^2-12x^2+38}{3y-2x+1}$
$8y-\dfrac{16+60y}{3x-1}=\dfrac{16xy-107}{2x+5}$

88. $\dfrac{x}{b^2-1}-\dfrac{y}{a^2-1}=a^2-b^2,\ \dfrac{x}{a^2+1}+\dfrac{y}{b^2+1}+2=a^2+b^2$

89. $3x + 5y = \dfrac{(8b - 2a)ab}{b^2 - a^2}$

$b^2x - \dfrac{a^2bc}{a + b} + (a + b + c)ay = a^2x + (2a + b)ab$

90. $\dfrac{1 + x}{2} = \dfrac{y - 1}{2} + \dfrac{(a - b)^2 - 2b^2}{a^2 - b^2}$

$by - ax = \dfrac{ab(3a + b)}{a^2 - b^2} - (a + b) + \dfrac{ab}{a + b}$

HERLEIDING VAN WORTELVORMEN.

1. $\dfrac{5c}{a^2x}\sqrt{\dfrac{18a^7x^{m+3}}{175b^4c^{3-n}}}$

2. $\sqrt[3]{54a^{n+6}b^3c^{n-3}g^{3n+4}}$

3. $3\sqrt[3]{(8a^5 - 32a^3b^4)}$

4. $\sqrt{\left(\dfrac{a^3b^2}{cg^2} - \dfrac{2a^2b^3}{c^2g^3}\right)}$

5. $x\sqrt[3]{\left(\dfrac{8a^4}{27b^3} + \dfrac{16a^3c^2}{54b^4}\right)}$

6. $5\sqrt[3]{\dfrac{27(1 - 16x^4)m^6}{125(1 + 2x)a^3}}$

7. $\sqrt[2n]{\dfrac{a^{6n+4}b^{2n-3}c^{2mn}}{x^{9n+5}y^{2n-1}}}$

8. Herleid $\sqrt[15]{(a^2 - b^2)^7(a + b)^5(a - b)^2}$;
$\sqrt{(a^3 - b^3)(a^2 + ab + b^2)^5}$; $\sqrt{(25a^2b^4 + 49a^6c^2)}$;
en $\sqrt{(25a^2b^4 + 49a^6c^2 - 70a^4b^2c)}$.

OPTELLING EN AFTREKKING VAN WORTELVORMEN.

1. Herleid $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
2. $a\sqrt{b} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt{b} + 8b\sqrt[n]{a}$
3. $\sqrt{12a^2b} + \sqrt{75b^5x^2} - \sqrt{192b^3m^4}$
4. $3\sqrt{578} - \sqrt{338} + 4\sqrt{242}$
5. $4\sqrt{147} + 5\sqrt{48} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{432}$
6. $3\sqrt[3]{108} + 2\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{256}$
7. $\sqrt{9ax^3} - (a - 5x)\sqrt{ax} + \sqrt{4a^3x}$
8. $\sqrt{18a^5b^3} \pm \sqrt{50a^3b^3}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt[m]{\dfrac{a^{3m+1}p^{2m}}{b^{2m+1}q^{3m}}} - \dfrac{ap}{bq}\sqrt[m]{\dfrac{a^{2m+1}p^m}{b^{m+1}q^{2m}}}$.

10. $\frac{1}{2}a^2p^2\sqrt[n]{\frac{a^n p}{2^n b^{2n} q^{3n+1}}} - \frac{a^3}{2b^2q^2}\sqrt[n]{\frac{p^{2n+1}}{3^n q^{n+1}}}.$

11. $(a+b)^2\sqrt{(a-b)} - \sqrt{(a-b)^5}.$

12. $(x^2+y^2)\sqrt{(x+y)^3(x-y)^3} - \sqrt{(x^2-y^2)^5}.$

13. $\sqrt{4(a-b)^3} + \sqrt{9a^2(a-b)} + \sqrt{(36ab^2-36b^3)}.$

14. $xy\sqrt[3]{(24x-16y)} + \sqrt[3]{(81x^4-54x^3y)}$
$- (2x+y)\sqrt[3]{(2xy^3-2y^4)}.$

15. $\sqrt[n]{(x-y)^{n-1}} + \frac{1}{x-y}\sqrt[n]{(x+y)^n(x-y)^{n+1}} + \sqrt[n]{\frac{y^n}{x-y}}.$

16. $(1-x)\sqrt[2n]{(1-x^2)(1-x^2)^{2n-1}} + (1+x)\sqrt[2n]{(1+x)^{2n+1}}$
$-\sqrt[2n]{(1+x)(1+x^2)^{2n}}.$

VERMENIGVULDIGING VAN WORTELVORMEN.

1. Breng bij de volgende vormen de factoren, die vóór het wortelteeken staan, er onder.

$$\frac{p-1}{2p}\sqrt{p},\qquad am\sqrt[3]{\frac{1}{a^2m^2}},\qquad a^{2m}\sqrt[3]{(x-a^m)},$$

$$(a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2-1}} \text{ en } \frac{ab^2c^3}{x^4}\sqrt[n]{\frac{x^{4n-4}}{a^{n-1}b^{2n-2}c^{3n-3}}}$$

2. Herleid $a\sqrt{\frac{b}{c}} \times d\sqrt{bc}$ en $\sqrt[10]{6} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[15]{\frac{2}{9}}$
3. Schrijf als één wortel: $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \times \sqrt[6]{2} \times \sqrt[8]{\frac{1}{2}}$
4. Herleid $\sqrt{32} \times (\sqrt{2} + \sqrt{8})$
5. $(4\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2\frac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{2}) \times 2\sqrt[3]{3}$
6. $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})$
7. $(-5 + \sqrt{\frac{3}{4}}) \times (-5 - \sqrt{\frac{3}{4}})$
8. $(3\sqrt{7} - \sqrt{11}) \times (\sqrt{11} + \sqrt{7})$
9. $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) \times (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$
10. $(a - \sqrt{ab} + b) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})$
11. $(2\sqrt{9\frac{4}{5}} + \sqrt{1\frac{4}{5}}) \times (3\sqrt{45} - 7\sqrt{5})$
12. $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}} - b\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \times \left(a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$
13. $\sqrt[3]{ac} \times \sqrt{\frac{b^2}{a}} \times \frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}}$

14. $\left(\sqrt[5]{\frac{ab^5x}{c^5y}} + \sqrt[3]{\frac{ac^4x^3}{bg}}\right) \times \left(\frac{b}{c}\sqrt[5]{\frac{ax}{y}} - cx\sqrt[3]{\frac{ac}{bg}}\right)$

15. Vermenigvuldig $a\sqrt{(1-b^2)} + b\sqrt{(1-a^2)}$ met $a\sqrt{(1-b^2)} - b\sqrt{(1-a^2)}$.

16. $\{a + \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - c)}\} \times \{a + \frac{1}{2}m - \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - c)}\}$

17. Substitueer $x = \frac{1}{5}(3 - \sqrt{3})$ in den vorm $75x^3 - 265x^2 + 228x - 42$.

18. Ontbind in factoren:
$a^2 + a\{\sqrt{(b+c)} - \sqrt{(b-c)}\} - \sqrt{(b^2 - c^2)}$.

DEELING VAN WORTELVORMEN.

1. $(x^3 - 2\sqrt[4]{x^2y^3} - x^2\sqrt[6]{x^3y^2} + 2y\sqrt[12]{y}) : (\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$

2. $(a^2 - 8ab + 7b^2)\sqrt[12]{a} : \left\{\sqrt[3]{a} - \frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right\}$

3. Herleid: $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

4. Vereenvoudig: $\frac{2a - 3b\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - 2b^2 + 11b - 15}{a - 5b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 6b^2 - 7b - 20}$

5. Verdrijf de wortelteekens uit den noemer van $\frac{9}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}}$.

6. Vereenvoudig $\frac{6x + 5y\sqrt{x} - 13\sqrt{x} - 6y^2 - 13y + 5}{6x - 13y\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 6y^2 + 11y - 10}$.

7. Deel $\sqrt[4]{(2a^2 - ab + 2ac - 6b^2 + 17bc - 12c^2)}$ door $\sqrt[4]{(2a + 3b - 4c)}$

8. Bereken x, y en z uit de volgende vergelijkingen

$$3x\sqrt{5} + 2y\sqrt{2} - z\sqrt{10} = 9$$
$$5x\sqrt{2} - 2y\sqrt{5} - 3z = 0$$
$$2x\sqrt{10} - 3y + z\sqrt{5} = 12\sqrt{2}$$

9. Herleid $\frac{a\sqrt[3]{b} - b\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + b\sqrt[3]{b}}$.

10. Bepaal tot in 6 decimalen de waarde van
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{24} - \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

11. Herleid $\frac{5582}{6\sqrt[3]{2} - 2\sqrt{5}}$.

12. Herleid $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

13. Deel 100 door $\sqrt[5]{7} + \sqrt[3]{\ } - 3$.

14. Deel $x^{15} + y^3$ door $x - \sqrt[5]{\ } - y$.

15. Bewijs dat uit de gelijkheid der breuken

$\dfrac{a}{b}, \dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2} \ldots\ldots$ volgt

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{\sqrt{(a^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots\ldots)}}{\sqrt{(b^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots\ldots)}}.$$

16. Herleid $\dfrac{n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{(n^2 - 4)} - 2}{n^3 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{(n^2 - 4)} + 2}$ door uit deeler en deeltal zooveel factoren weg te laten als mogelijk is.

17. Vereenvoudig: $\dfrac{x + 8y\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 15y^2 - 13y + 2}{x + 3\sqrt{x} - 9y^2 + 21y - 10.}$

18. Bepaal het omgekeerde van $5 + \sqrt{6} + \sqrt[4]{8}$.

19. $12\sqrt{6} : (\sqrt{6} - \sqrt{12} + \sqrt{2} + 1) =$

20. Herleid $8\sqrt[4]{2} : (2\sqrt{2} - \sqrt[4]{3})$

21. $\dfrac{(\sqrt[6]{7776} + 2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt{3}\sqrt[6]{2} + 2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt{2}\sqrt[6]{3} + 2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{6} + \sqrt[3]{2}} =$

22. Tot welke waarde nadert de breuk

$\dfrac{\sqrt{(2x - 2)} - \sqrt[3]{(2x^3 - x^2 - 1)}}{\sqrt[3]{(x^5 - 1)}}$ als x tot 1 nadert.

23. Vervorm $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ zoodanig, dat haar noemer rationaal worde, en geef tevens op, met welke gebrokens van deze soort de genoemde vervorming niet kan plaats hebben.

WORTELTREKKING UIT WORTELVORMEN.

1. Herleid $a\sqrt{[a\sqrt[3]{(a\sqrt{a})}]}$ tot een enkelen wortel.

2. " $\sqrt[n]{\dfrac{a^x\sqrt{b}}{c\sqrt[3]{ab^2}}}$ en $\dfrac{\sqrt[3]{(a\sqrt{b})}}{\sqrt{(b\sqrt[3]{a})}}$

3. " $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$

4. $\sqrt{\{2\sqrt{(2\sqrt{2})}\}} : \dfrac{64}{3a\sqrt{2}}$

5. $\sqrt[3]{\dfrac{2x\sqrt{6x}}{\sqrt{(1 - x^2)}}} : \dfrac{1 + x}{\sqrt{(1 - x)}}$

6. $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) : \sqrt{\{3 + 2\sqrt{(5 - 2\sqrt{2})}\}}$
7. $(21\sqrt{6} + 23\sqrt{5}) : \sqrt{(11 + 2\sqrt{30})}$
8. $\sqrt[3]{(6 - 2\sqrt{3})} : \sqrt{\{10 - 3\sqrt{(4 - 3\sqrt{2})}\}}$
9. $(7 + 3\sqrt{2}) : \sqrt{(2\sqrt{7} - 3\sqrt[3]{2})}$
10. $(\sqrt[4]{6} + \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}) : [3\sqrt[4]{6} - 2\sqrt{(2 + \sqrt[3]{2})}]$
11. $\dfrac{1 + 4n}{\sqrt{5}} : \sqrt{\{\sqrt{(3 + 2n)} + \sqrt{2(1 - n)}\}}$
12. $2a : \sqrt{\{\sqrt{(1 + \sqrt[3]{a})} - \sqrt{(1 - \sqrt[3]{a})}\}}$
13. Herleid $\sqrt{\{-31 - 4\sqrt{15} + 6\sqrt{10} + 10\sqrt{6}\}}$
14. Als in $\sqrt{(x^2 + 7x - 26)}$ voor x wordt gesubstitueerd $7 - \sqrt{3}$, wat is dan de waarde dezer uitdrukking?
15. Herleid tot de eenvoudigste gedaante
$\sqrt{(6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}}$ en
$\sqrt{(15 - \sqrt{6} - 6\sqrt{2})} - \sqrt{(15 + \sqrt{6} + 6\sqrt{2})}$.
16. Vereenvoudig $\sqrt[4]{\{a^2 + \sqrt{(b^4 - 3a^4)}\}} \times \sqrt[4]{\{a^2 - \sqrt{(b^4 - 3a^4)}\}}$
17. Breng bij de volgende vormen de factoren, die vóor een wortelteeken staan, er onder.
$$3\sqrt{\{3\sqrt{(3\sqrt{3})}\}} \text{ en } 2\sqrt{\{2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})}\}}$$
18. Herleid $6\sqrt{(3 - \sqrt{5})} + 2\sqrt{(15 - 5\sqrt{5})}$ tot een enkelen wortelvorm.
19. Verander $\sqrt{(-5 + 3\sqrt{5})}$ in de som van twee wortels.
20. Bereken x uit de vergelijking
$$\sqrt{68} : x = 2\sqrt{(3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})}.$$
21. Bereken $\dfrac{42}{\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})}}$ in vijf decimalen nauwkeurig.
22. Herleid $(1{,}4 - 0{,}7\sqrt{3})\sqrt{(1{,}4 + 0{,}7\sqrt{3})} +$
$(1{,}4 + 0{,}7\sqrt{3})\sqrt{(1{,}4 - 0{,}7\sqrt{3})}$.
23. Herleid $\sqrt{(11 + 2\sqrt{10})} \pm \sqrt{(11 - 2\sqrt{10})}$.
24. Vereenvoudig $\sqrt{(a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2})} + \sqrt{(b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4})}$
25. Herleid $\sqrt{\{6 + \sqrt{(5 + 12\sqrt{3})}\}} - \sqrt{\{6 - \sqrt{(5 + 12\sqrt{3})}\}}$.
26. Bepaal de vierkantswortels uit
$$b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + \sqrt{(4ab^3 - 8a^2b^2 + a^3b)}$$
27. Bepaal de waarde van $\dfrac{2a + \sqrt{(1 + x^2)}}{a + \sqrt{(1 + x^2)}}$, als
$$2x = \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}$$

28. Bepaal de tweedemacht van

$$\sqrt{\left\{\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{(x^2-y)}}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{(x^2-y)}}{2}\right\}}$$

29. Herleid $\dfrac{1}{\sqrt[6]{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y})}}$ en $\dfrac{4\sqrt[3]{(\sqrt[4]{13}-\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})^2}}$

30. Herleid $\dfrac{13}{\sqrt{(\sqrt[3]{12}-\sqrt{3})}}$ en $\dfrac{10}{\sqrt[3]{(\sqrt{6}-\sqrt[3]{4})}}$

31. Trek den vierkantswortel uit den vorm
$x+1-2\sqrt[4]{x}(1+\sqrt{x})+3\sqrt{x}$.

32. Verdeel $\sqrt{(15+6\sqrt{5})}$ in de uiterste en middelste reden.

33. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}.$$

34. Bepaal den derdemachtswotel uit $3\sqrt{3}\times(5\sqrt{2}-7)$

35. Herleid op de eenvoudigste wijze
$\sqrt{(a+x+2\sqrt{ax})}\pm\sqrt{(a+x-2\sqrt{ax})}$

36. Herleid tot een enkelen wortelvorm

$$\sqrt{\left(\frac{ab+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4a}{b}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{ab+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4a}{b}}\right)}$$

37. Vereenvoudig $\sqrt{\{8-\sqrt{(24+8\sqrt{5})}\}}$

WORTELTREKKING UIT VEELTERMEN.

1. Bewijs, dat de tweedemacht van een veelterm gelijk is aan de som der tweedemachten van zijn termen, plus twee maal de som der produkten van die termen twee aan twee.
2. Welke 4 termen kan men onmiddellijk opschrijven als men de tweedemacht moet bepalen van een drieterm, vierterm, vijfterm, enz.
3. Bepaal den stelkundigen vorm van den laagst mogelijken graad, dien men moet optellen bij

$$16x^4-40x^3+23x^2+26x-49,$$

om hiervan een volkomen tweedemacht te maken.

Bepaal den derdemachtswortel uit elk der volgende vormen.

4. $x^6 - 3a^4x^4 + 3a^8x^2 - a^{12}$.

5. $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$.

6. $\frac{x^3}{8} + \frac{8}{27a^6} + \frac{2}{3a^3} + \frac{1}{2}$.

7. $\frac{x^3}{y^6} - 3\frac{x}{y^2} - \frac{y^6}{x^3} + 3\frac{y^2}{x}$.

8. $x^3 - 12x^2 + 54x - 112 + \frac{108}{x} - \frac{48}{x^2} - \frac{8}{x^3}$

9. $\frac{a^3c^3}{b^3} - \frac{3a^2c}{bx} + \frac{3ab}{cx^2} - \frac{b^3}{c^3x^3}$.

---

10. Bepaal de vierkantswortels uit $m^2n^2 + m^2r^2 + n^2r^2$, als $m = \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{a^2b}$, $n = \frac{2}{ab^2} + \frac{1}{a^2b}$, $r = \frac{3}{ab^2} + \frac{2}{a^2b}$

Bepaal de reëele vierdemachtswortels uit de volgende vormen.

11. $x^4 - 28x^3 + 294x^2 - 1372x + 2401$.

12. $16 - \frac{32}{m} + \frac{24}{m^2} - \frac{8}{m^3} + \frac{1}{m^4}$.

13. $a^4 + 8a^3x + 16x^4 + 32ax^3 + 24a^2x^2$.

14. $1 + 4x + 2x^2 - 8x^3 - 5x^4 + 8x^5 + 2x^6 - 4x^7 + x^8$.

15. $1 + 8x + 20x^2 + 8x^3 - 26x^4 - 8x^5 + 20x^6 - 8x^7 + x^8$.

---

16. Bepaal den stelkundigen vorm van den laagst mogelijken graad, dien men moet aftrekken van

$$27p^6 + 36p^5 + 12p^4 - 8p^2 + 9p + 41,$$

om hiervan een volkomen derdemacht te maken.

17. Welk verband moet er tusschen de coëfficienten bestaan, zal $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ een volkomen tweedemacht zijn?

18. Bepaal de twee middelevenredigen van

$$4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2x + 0{,}25 \text{ en}$$

$$\frac{1051x^2}{25} - \frac{6x}{5} - \frac{14x^3}{5} + 9 + 49x^4.$$

19. Onderzoek door worteltrekking of de volgende reeks goed is.

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \ldots$$

20. Bepaal den derdemachtswortel uit den vorm:

$$\frac{8a^3x^3}{27b^3y^3} - 2\frac{a^3xz}{b^3y^2} + 4\tfrac{1}{2}\frac{a^3z^2}{b^3xy} - \frac{27a^3z^3}{8b^3x^3} + \frac{a^2x^2}{3b^2y^2} - 1\tfrac{1}{2}\frac{a^2z}{b^2y} +$$

$$+ \frac{27a^2z^2}{16b^2x^2} + \tfrac{1}{8}\frac{ax}{by} - \frac{9az}{32bx} + \tfrac{1}{64}.$$

21. $\sqrt{(4a^{2m} + 2a^{m+2}x^n + \tfrac{1}{4}a^4x^{2n})} =$

22. $\sqrt{\left[\frac{(a^2 - m^2)^2}{4a^2m^2} + 4a - 4m + \frac{16a^2m^2}{a^2 + 2am + m^2}\right]} =$

23. Bepaal de betrekking, die er tusschen a, b en c moet bestaan, zal $x^3 + 3ax^2 + bx + c$ een volkomen derdemacht zijn voor alle waarden van x.

24. Bepaal de voorwaarden, dat

$$x^6 + 3ax^5 + 3bx^4 + a(6b - 5a^2)x^3 + 3b(b - a^2)x^2 + 3cx + d$$

een volkomen derdemacht zij voor alle waarden van x.

25. Bepaal de vierkantswortels uit de volgende twee vormen

$$x^4 + (2a - 4)x^3 + (a^2 - 2a + 4)x^2 + (2a^2 - 4a)x + a^2.$$

$$(a+1)^2x^4 + (2a^2 + 2a)x^3 + (3a^2 - 4a - 6)x^2 + (2a^2 - 6a)x + a^2 - 6a + 9.$$

26. Voor welke waarden van m wordt $3mx^2 + (6m - 12)x + 8$ een volkomen vierkant?

27. Bepaal de waarde van m, als men weet dat

$$4x^4 + 12x^3y + mx^2y^2 + 6xy^3 + y^4$$

een volkomen vierkant is.

28. Als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ vraagt men te bewijzen, dat de vierkantswortel uit $\frac{a^6b - 2c^5e + 3a^4c^3e^2}{b^7 - 2d^5f + 3b^4cd^2e^2}$ gelijk is aan $\frac{ace}{bdf}$.

29. $\sqrt{(121x^3\sqrt[3]{x^2} - 264x^4\sqrt[24]{x^{11}} + 144x^5\sqrt[4]{x})}$

30. $\sqrt{(169x^2\sqrt[6]{a^5x} - 364ax^2\sqrt[24]{a^7x^5} + 196ax^2\sqrt[4]{a^3x})}$

31. $\sqrt{\left(\frac{4}{81}a - \frac{1}{3}\sqrt[4]{a^3} + \frac{9}{10}\sqrt{a} - \frac{8}{9}\sqrt[4]{a} + 3 + \frac{4}{\sqrt{a}}\right)}$

32. $\sqrt[3]{(27a^2x^4 - 135a^2x^3\sqrt[6]{a^5x} + 225a^3x^2\sqrt[3]{a^2x} - 125a^4x\sqrt{ax})}$

33. $\sqrt[3]{(27a^4x\sqrt{ax} - 108a^3x^2\sqrt[6]{\frac{a^2}{x}} + 144a^2x^2\sqrt[6]{ax} - 64ax^2\sqrt{x})}$.

34. Bepaal de waarde van x, waarvoor

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 13x - 1$$

een rekenkundig getal wordt, dat een volkomen tweedemacht is.

35. $\sqrt{\left(a^{2m} - 2a^m b^n x^r + b^{2n}x^{2r} - \frac{2b^{2n}}{x^2} + \frac{2b^{3n}x^{r-2}}{a^m} + \frac{b^{4n}}{a^{2m}x^4}\right)}$.

36. $\sqrt{\left[\frac{4a^{2n}c^6}{b^{4n}d^{2p-2}} - \frac{12a^{2n-1}c}{b^n d^{p-1}} + \frac{9a^{2n-2}b^{2n}}{c^4} + \frac{2a^{n-3}c^3d^{p+1}}{3b^{2n-2}} - \frac{a^{n-4}b^{n+2}d^{2p}}{c^2} + \frac{b^4d^{4p}}{39a^6}\right]}$

37. $\sqrt[3]{\left(\frac{x^9}{y^6} - \frac{3x^4}{y} + \frac{3y^4}{x} - \frac{y^9}{x^6}\right)} =$

38. $\sqrt[3]{(x^{3n} - 3x^{2n}a^m + 3x^n a^{2m} - a^{3m})} =$

39. $\sqrt[3]{\left(a^6x^{3n} - 3a^{n+4}x^{n+1} + \frac{3a^{2n+2}}{x^{n-2}} - \frac{a^{3n}}{x^{3n-3}}\right)} =$

40. $\sqrt[3]{\left(\frac{a^{3n}x^{3m}}{b^{3n+3m}} + \frac{3a^{n+1}}{b^{2m}x} + \frac{3b^{3n-m}}{a^{n-2}x^{3m+2}} + \frac{b^{6n}}{a^{3n-3}x^{6m+3}}\right)} =$

41. $\sqrt[3]{(8 - 36x + 114x^2 - 207x^3 + 285x^4 - 225x^5 + 125x^6)} =$

42. $\sqrt[3]{\left[\frac{64}{729} - \frac{32}{81}u^2 + \frac{20}{27}u^4 - \frac{20}{27}u^6 + \frac{5}{12}u^8 - \frac{1}{8}u^{10} + \frac{1}{64}u^{12}\right]} =$

43. $\sqrt[3]{\left|\frac{64a^6c^6}{b^{12}x^6} + \frac{48a^5c^7}{b^9x^4} + \frac{15a^4c^8}{b^6x^2} + \frac{5a^3c^9}{2b^3} + \frac{15a^2c^{10}c^2}{64}\right|} =$

44. $\sqrt[3]{[8a^3 - 36a^2x + 54ax^2 - 27x^3 + 12a^2z - 36axz +}$
$+ 27x^2z + 6az^2 - 9xz^2 + z^3] =$

45. $$\sqrt[3]{\left[\frac{8a^3b^{3m}}{c^3} - 9 + \frac{27c^3}{8a^3b^{3m}} - \frac{27c^6}{64a^6b^{6m}} - \frac{8a^3b^{2m+1}}{c^3} + \frac{6}{b^{m-2}} - \frac{9c^2}{8a^3b^{4m-2}} - \frac{20ab^{2m+1}}{c^2} + \frac{15c}{a^2b^{m-1}} - \frac{45c^4}{16a^5b^{4m-1}} + \frac{8a^3b^{m+4}}{3c^3} + \frac{40ab^{m+3}}{3c^2} + \frac{50b^{m+2}}{3ac} - \frac{1}{b^{2m-4}} - \frac{5c}{a^2b^{2m-3}} - \frac{25b^2c^2}{4a^2b^{2m}} - \frac{8a^2b^6}{27c^3} - \frac{20ab^5}{9c^2} - \frac{50b^4}{9ac} - \frac{125b^3}{27a^3}\right]} =$$

46. Bepaal de waarden van x, waarvoor de volgende vormen volkomen derdemachten worden:

$$\frac{x^6}{27} - \frac{a^2x^4}{3} + 4a^4x^2 - 28a^6.$$

$$m^3x^6 - 9m^2nx^4 + 39mn^2x^2 - 51n^3.$$

ONGELIJKHEDEN VAN MACHTEN EN WORTELS.

1. Wat is meer, $\sqrt{2}$ of $\sqrt[3]{3}$?
2. Bewijs dat $\frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.
3. " " $\sqrt{6} > \sqrt[3]{12}$.
4. " " $\sqrt{19} + \sqrt{3} > \sqrt{10} + \sqrt{7}$.
5. " " $a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 > (a^3 + b^3)^2$
6. " " $n^3 + 1 > n + n^2$
7. " " $3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$
8. " " $a^m - b^m < ma^{m-1}(a - b)$ en $> mb^{m-1}(a - b)$, als $a > b$
9. " " $xy > ac + bd$, als $x^2 = a^2 + b^2$ en $y^2 = c^2 + d^2$
10. " " $2(1 + x^2 + x^4) > 3(1 + x^3)$
11. " " $abc > (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$, als a, b en c ongelijk zijn.
12. " " $\sqrt[3]{p} > \sqrt[4]{(p+1)}$, als p niet kleiner is dan 3.
13. Als van eenige breuken met positieve tellers en noemers, de som der tellers gedeeld wordt door de som der noemers, ligt het quotient tusschen de kleinste en de grootste der gegeven breuken.
14. Bewijs, dat de rekenkundig middelevenredige tusschen 2

positieve ongelijke getallen grooter is dan de meetkundig middelevenredige.

15. Als a en b positief zijn en $a > b$, vraagt men uit de ongelijkheid $\frac{x+a}{\sqrt{(x^2+a^2)}} > \frac{x+b}{\sqrt{(x^2+b^2)}}$ af te leiden, tusschen welke grenzen x moet liggen.
ANTW.: x neg. of grooter dan $\sqrt{ab}$.

16. Bewijs, dat $pq + p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots$ kleiner is dan
$\sqrt{(p^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + \ldots)} \times \sqrt{(q^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + \ldots)}$
tenzij $p : q = p_1 : q_1 = p_2 : q_2 = \ldots$

17. Bewijs, dat voor een geheel even getal n
$$a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots + 1 > 0.$$

18. Bewijs, dat aan de ongelijkheid
$$3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$$
voldaan wordt door alle positieve en negatieve waarden van a.

19. Als gegeven is $a^2 = b^2 + c^2$, vraagt men of a^3 grooter of kleiner is dan $b^3 + c^3$. Om de vraag op te lossen, vergelijke men $(a^3)^2$ met $(b^3 + c^3)^2$, waarbij op te merken valt, dat $(a^3)^2 = (a^2)^3$.

20. Bewijs dat de twee betrekkingen
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \text{ en } p^2 + q^2 + r^2 = 1$$
ten gevolge hebben de ongelijkheid
$$lp + mq + nr < 1.$$

21. Bewijs de ongelijkheid
$$\sqrt{(a^2 : b)} + \sqrt{(b^2 : a)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

22. Bewijs de ongelijkheid
$$(a + b - c)^2 + (a + c - b)^2 + (b + c - a)^2 > ab + bc + ca.$$

23. Bewijs de ongelijkheid
$$6abc < ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) < 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

24. Bewijs dat $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ positief is voor alle positieve waarden van x. (Men ontbinde in factoren).

25. Bewijs, dat de $(m + n + p + q)$ - de machtswortel uit $abcd$ tusschen den grootsten en den kleinsten der volgende vier wortels ligt
$$\sqrt[m]{a},\ \sqrt[n]{b},\ \sqrt[p]{c},\ \sqrt[q]{d}.$$

26. Wanneer a, b en c ongelijke positieve getallen zijn, vraagt men te bewijzen:

$$9(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c)^3 > 27abc.$$

27. Bewijs dat $2(x^2 + y^2 + z^2) > xy + yz + zx$, en $3(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) > xy + xz + xu + yz + yu + zu.$
28. Bewijs dat $(a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$, tenzij $a = b = c$.
29. Bewijs dat $2(1 + n^2 + n^4) > 3(n + n^3)$ tenzij $n = 1$.
30. " " $\sqrt[3]{n^2 - 1} > \sqrt[3]{(n-1)^2}$ tenzij $n = 1$.
31. " " $a + \sqrt{a} > 1 + \sqrt{a^3}$ en $\sqrt[3]{a^2 - 1} > a - 1$, als a grooter is dan 1.

GEBROKEN EN NEGATIEVE EXPONENTEN.

1. Met behulp van gebroken exponenten te herleiden

$$\left[\left\{\sqrt[3]{\left(a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)}\right\}^3\right]^2.$$

2. Ontwikkel $(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{3}})^3$ en schrijf de uitkomst zonder negatieve en gebroken exponenten.
3. $\left\{\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{-2}\right\}^{-3}$; $\quad\left[-\frac{x^0y^{-n}}{a^2b^{-1}}\right]^{-1}$; $\quad\left[\frac{p^{-n}q^{-m}}{r^{-m}s^n}\right]^{-a}$.
4. $\left\{\left(\frac{a^{-3}b^{-4}}{x^2y^{-5}}\right)^{-2}\right\}^{+3}$; $\quad\left\{\left[\left(\frac{1}{a^{-3}b^4x^{-2}y^4}\right)^{-2}\right]^{-n}\right\}^{-m}$.
5. $(m^2n^{-3})^{-3}.\ (m^2n^{-3})^4$; $(m^{-2}n^4)^{-n}.\ (m^{-2}n^3)^{n-2}$.
6. $(x^{-n}y^m)^{-a}.\ (x^{-n}y^m)^{a+2}$; $(a^3b^{-4})^{-3}.\ (a^{-2}b^3)^{-3}$.
7. $(x^{-a}y^{-\beta})^{-n}.\ [x^{a+\beta}y^{\beta-a}]^{-n}$; $(3a^{-2}bx^{-3}y^4)^{-2} \times (5ab^{-1}x^2y^{-3})^3$.
8. $\left[\frac{5a^{-3}}{b^4}\right]^{-3}.\ \left[\frac{2a^5}{b^2}\right]^{-4}$; $\left[\left(-\frac{m^{-3}p^5}{n^{-2}q^4}\right)^{-3}\right]^4.\ \left[\left(\frac{n^{-1}q^3}{m^{-2}p^5}\right)^{-2}\right]^{-3}$.
9. $\left(\frac{m^{-2}n^3p^4}{q^3}\right)^{-4}.\ \left(\frac{n^{-2}p^{-2}}{m^{-3}q^{-5}}\right)^3.\ \left(\frac{3m^2q^3}{n^4p^2}\right)^{-5}$.
10. $(3a^3)^{-n} : (3a^3)^{-n+2}$; $(a^{-3}b^4)^{-3} : (a^{-3}b^4)^{-2}$.
11. $(-a^5)^{-3} : (-a^2)^{-3}$; $(p^5q^{-4})^{-n} : (p^2q^{-3})^{-n}$.
12. $\left[\frac{4p^{-3}q^4x^3}{y^2}\right]^{-5} : \left[-\frac{8x^3y^2}{p^2q^3}\right]^{-4}$; $\left[\frac{5^4a^nx^{-3}}{b^my^{-4}}\right]^{-a} : \left[\frac{5^2a^3b^{-2}}{3x^2y^{-3}}\right]^{-a}$

13. $\left\{\left[\frac{m^{-3}p^{4}}{n^{-3}q^{2}}\right]^{-3} : \left[\frac{m^{2}p^{2}}{n^{3}q^{4}}\right]\right\} : \left[\frac{n^{3}p^{-4}}{m^{5}q^{-6}}\right]^{-2}.$

14. $(x^{-4} - 2x^{-3}y + 2x^{-2}y^{2} + 3x^{-1}y^{3} + 3y^{4})\ (x^{2} + x^{3}y + x^{4}y^{2}).$

15. $(a^{-3} - 3a^{-2}b^{-1} - 3a^{-1}b^{-2} + b^{-3})\ (a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}.$

16. $(x^{-5n} - x^{-3n}y^{2m} + 2x^{-2n}y^{3m} - x^{-n}y^{4m}) : (x^{-2n} - x^{-n}y^{m} + y^{2m}).$

17. $$\left[\tfrac{7}{10}\frac{y^{-4n}}{x^{-3m}} - 2\tfrac{25}{36}\frac{y^{-2n}}{x^{-2m}} - 5\tfrac{11}{60}\frac{1}{x^{-m}} + 9\tfrac{3}{4}\frac{1}{y^{-2n}} - 11\tfrac{41}{60}\frac{x^{-m}}{y^{-4n}} + 1\tfrac{3}{4}\frac{x^{-2m}}{y^{-6n}} + 3\tfrac{3}{10}\frac{x^{-3m}}{y^{-8n}}\right]$$
$$: \left[\tfrac{3}{5}\frac{y^{-4n}}{x^{-4m}} - 1\tfrac{2}{3}\frac{y^{-2n}}{x^{-3m}} - \frac{7}{x^{-2m}} + \frac{3}{x^{-m}y^{-2n}} + 2\tfrac{1}{5}\frac{1}{y^{-4n}}\right].$$

18. Herleid : $\dfrac{\sqrt[3]{\left\{a^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\left(\frac{1}{ab}\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-2}}\right)}\right\}}}{\sqrt[4]{\left(b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{-1}b^{5}\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{4}b}}\right)}}$

19. $\sqrt{\left(a^{\frac{1}{x}} - 2\left(a^{\frac{1}{2}}b\right)^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{2}{x}} + 6a^{\frac{1}{2x}}c^{\frac{2}{x}} - 6(bc^{2})^{\frac{1}{x}} + 9c^{\frac{4}{x}}\right)}$

20. $\dfrac{\sqrt{\{(a-b)\sqrt[3]{(a+b)}\}} \times \sqrt[3]{\{(a+b)\sqrt[5]{(a-b)}\}}}{\sqrt[3]{(a^{2}-b^{2})^{-\frac{4}{5}}}}$

21. Bepaal den derdemachtswortel uit
$8a^{3} - 12a^{2} + 30a - 25 + 30a^{-1} - 12a^{-2} + 8a^{-3}$

22. $(\frac{4}{9}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{5}} - \frac{16}{25}ab^{\frac{5}{3}}) : (\frac{2}{3}a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{5}} - \frac{4}{5}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{6}})$

23. $\dfrac{8x^{-1\frac{7}{15}} - 12x^{-\frac{4}{5}}y^{-\frac{3}{4}} - 10x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{5}{6}} + 15y^{-1\frac{7}{12}}}{4x^{-\frac{4}{5}} - 5y^{-\frac{5}{6}}}$

24. $\left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{4b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4b^{\frac{2}{5}}}{3a^{\frac{1}{4}}} + \frac{9a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{8}\right) \times \left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{4b^{\frac{1}{2}}} + \frac{4b^{\frac{2}{5}}}{3a^{\frac{1}{4}}} - \frac{9a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{8}\right)$

25. $\sqrt[3]{\dfrac{a^{2}b^{2-n}c^{3n}}{x^{6}yz^{-6n}}}$; $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^{x}b^{n-3}c}}$; $\dfrac{(a-b)^{\frac{1}{8}}(a+x)^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{5m}{4}}}$

26. $1 : \sqrt[n]{a^{4n-3}}$; $20ac^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}} : 5a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}.$

27. $\sqrt[3]{(a\sqrt[n]{bc^{2}})}$; $(\frac{5}{4})^{\frac{2}{3}} : (\frac{5}{4})^{\frac{3}{4}}$; $(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{2}.$

28. $\dfrac{\sqrt[n]{a^{m}}}{\sqrt[3]{b^{2}}} \times \dfrac{\sqrt[3]{b^{n}}}{\sqrt[n]{a^{x-3}}}$; $\left(\dfrac{2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{3c} - \dfrac{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{4c^{2}}\right)^{3}$

29. $\left(\dfrac{12a}{5b}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(\dfrac{3a}{5b}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\qquad (a^{\frac{n}{2}} - b^{\frac{x}{2}} + 3c^{\frac{1}{2}})^{2}$

30. $\left[2\sqrt{\frac{1-x}{x}} \times \sqrt[3]{\frac{9x^2}{4-8x+4x^2}}\right]^{-1} : \left(\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)^2}}\right)^{-2}$

31. Verminder $\frac{1}{2}\,(a^{\frac{1}{2}} + 3a^{-\frac{1}{2}})$ met $\frac{1}{3}\,(a^{\frac{1}{2}} - 2a^{-\frac{1}{2}})\,(a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}})$, vermenigvuldig de rest met $6(1 - a^{-1})^{-1}$ en deel 't produkt door

$$\{a^{\frac{1}{3}} - (-6)\}^{\frac{1}{2}}\,\{a^{\frac{1}{2}} + (-6)\}^{\frac{1}{2}}$$

32. Herleid : $\dfrac{\sqrt[3]{\{a^{-\frac{1}{4}}\sqrt{(\frac{1}{ab}\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^{-2}})}\}^2}}{\sqrt{(b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{-1}b^5\sqrt[\frac{2}{3}]{a^4b}})}}$

33. Herleid tot de eenvoudigste gedaante :

$$\frac{a^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\{a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}\sqrt[\frac{1}{3]{(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a})}}\}}}{\sqrt[3]{(a\sqrt[6]{(ab^{-\frac{3}{4}}\sqrt{a^{-\frac{3}{2}}})})}}$$

34. Herleid : $\dfrac{a^{-3}\sqrt[3]{a^{-\frac{3}{4}}\sqrt{a\sqrt[4]{\;}^{-\frac{1}{2}})^2}}}{\sqrt[3]{(a\sqrt{(a^{-2}\sqrt[3]{(a\sqrt{b^{\frac{5}{2}}})})})^2}}$

Bepaal den derdemachtswortel uit elk der volgende 2 vormen.

35. $512x + 960x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 600x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 125y - 576x^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}} -$
$- 720x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - 225y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}} + 216x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}} + 135y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}} - 27z.$

36. $\frac{a^{1\frac{1}{2}}}{b}\left\{a^{4\frac{1}{2}} + 3\frac{a^{3\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}} + 3\frac{a^3}{b} + 3\frac{a^{2\frac{1}{2}}}{b^{\frac{2}{3}}} + 6\frac{a^2}{b^{1\frac{2}{3}}} + 3\frac{a^{1\frac{1}{2}}}{b^2} +\right.$
$\left.+ \frac{a^{1\frac{1}{2}}}{b} + \frac{3a}{b^{1\frac{2}{3}}} + \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{b^{2\frac{1}{3}}} + \frac{1}{b^3}\right\}.$

---

37. Vereenvoudig het produkt van $\{(a-b)^2 + 4ab\}^2$ en

$$\{(a+b)^2 - 4ab\}^{\frac{3}{2}} \times \left\{\frac{a^4 - b^4}{a-b} + 2ab(a+b)\right\}^{\frac{2}{3}}$$

38. Herleid tot den eenvoudigsten vorm :

$$\frac{(a-b)\sqrt[3]{\frac{7a^2(a-b)^{-2}}{b^{-2}}}\,.\,\sqrt[5]{a^{-2}\sqrt[3]{(a-b)^{-5}}}}{\sqrt[3]{-\frac{a^4b^{-5}(b-a)^3}{7^{-2}}}\,.\,\sqrt[5]{\{a^{-7}(b-a)^5\}}.}$$

GEBROKEN EN NEGATIEVE WORTEL-EXPONENTEN.

1. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\frac{\sqrt[8]{a^{-1}\sqrt[4]{\left\{a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}}\sqrt[\frac{1}{8}]{\left(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{a}\right)}\right\}}}}{\sqrt[6]{\left\{a\sqrt[6]{\left(ab^{-\frac{3}{4}}\sqrt{a^{-\frac{3}{2}}}\right)}\right\}}}$$

2. $\left[\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{2\sqrt{a^3}}{a\sqrt[3]{2}}}+\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{a\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{a}}}\right]^{\frac{3}{2}}:\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{2}}:\frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt[3]{a^2}}\right]^{-\frac{1}{3}}.$

3. $\left[\sqrt[4]{\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}}:\sqrt{\frac{2a}{\sqrt[4]{2a^4}}}\right]\times\left(\frac{3\sqrt[4]{a^{\frac{5}{2}}}(6a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{27}}\right)^{-1}.$

4. $\sqrt[-2n]{\frac{a^3\sqrt{(a^2-x^2)}}{a-x}}\times\sqrt[n]{\frac{a^{-\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}\times\sqrt[4]{(a^2x^{-2}-1)}}}.$

5. Herleid: $a^3b^{\frac{14}{3}}c^3\times\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[4]{b^3}\times\sqrt[5]{c^{-4}}\times a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{5}}c^{\frac{3}{4}}\times$
$\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\times\sqrt[-\frac{60}{61}]{b}\times\sqrt[20]{c}.$

6. Herleid: $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{ab^{\frac{3}{2}}}{c^{-2}}}\times\sqrt[\frac{3}{4}]{\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{-3}}{c^{-2}}}\times\sqrt[\frac{4}{3}]{\frac{a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{8}}}{c^{-\frac{4}{3}}}}.$

7. Herleid $\sqrt[-6]{[2p\sqrt[3]{(p-q)^{-4}}}\times\sqrt[-6]{\{2q\sqrt[3]{(p^2-q^2)^4}\}}].$

INHOUD.

Werken van J. VERSLUYS.

HANDLEIDING BIJ HET REKENONDERWIJS.

Eerste deel. Getallen van 1 tot 10. *Derde druk* . . . . . . *f* 0,60.
Tweede deel. Getallen van 1 tot 100. *Derde druk* . . . . . „ 1,00.
Derde deel. Getallen tot 1000 en hooger. *Derde druk*. . . . „ 0,50.
Vierde deel. Breuken. *Derde druk* . . . . „ 1,10.

REKENBOEK VOOR DE LAGERE SCHOOL.

Eerste stukje. Getallen tot 10. *Vierde druk* . . . . *f* 0,10.
Tweede stukje. „ „ 20. *Vijfde* „ . . . . „ 0,20.
Derde stukje. „ „ 100. *Zesde* „ . . . . „ 0,20.
Vierde stukje. „ „ 1000 en hooger. *Zesde druk* . . . „ 0,20.
Vijfde stukje. Gewone en tiendeelige breuken. „ „ . . . . „ 0,20.
Zesde stukje. „ „ „ „ *Vijfde* „ . . . . „ 0,20.
Zevende stukje. Interest-rekening enz. *Vierde druk* . . . . „ 0,20.
Achtste stukje. Denkoefeningen. *Derde druk* . . . . „ 0,20.
Vierde stukje A tot 1000 . . . . „ 0,16.
„ „ B „ 10000 . . . . „ 0,16.
„ „ C. Grootere getallen . . . . „ 0,16.

Eerste Verzameling. Gemengde vraagstukken over de getallen tot 100. *Tweede druk* . . . . *f* 0,16.
Tweede „ De getallen tot 1000 en hooger. *Derde druk*. „ 0,16.
Derde „ Over breuken. *Tweede druk* . . . . . . „ 0,16.
Vierde „ Over percentrekening, winst- en verliesrekening enz. *Tweede druk* . . . . „ 0,16.

HANDLEIDING BIJ HET HOOFDREKENEN.

I. Getallen van 1 tot 100 . . . . *f* 0,60.
II. Getallen tot 1000 en hooger . . . . „ 0,60.
III. Breuken, interest-rekening, enz. . . . . „ 0,60.

VRAAGSTUKKEN VOOR HET HOOFDREKENEN.

Eerste stukje. Getallen tot 100 . . . . *f* 0,25.
Tweede stukje. „ „ 1000 en hooger. . . . . „ 0,30.
Derde stukje. Breuken A. . . . . „ 0,30.
Vierde stukje. „ B. . . . . „ 0,25.
Vijfde stukje. Interest-rekening, enz. . . . . „ 0,25.

REKENBOEKJES

DOOR

J. VERSLUYS.

Deze sluiten zich onmiddellijk aan bij de *Handleiding voor het Rekenonderwijs* van denzelfden schrijver.

De eerste druk verscheen in 1876
De tweede 〃 〃 〃 1877
De derde 〃 〃 〃 1878 en in 1883 en 1884 was reeds van verschillende stukjes een zesde druk noodig.

Deze serie, die uit **acht stukjes** bestaat, vormt met de vraagstukken over vormleer, de 4 verzamelingen en de vraagstukken voor het rekenen uit het hoofd van denzelfden schrijver, het meest volledige stel, dat wij bezitten.

In de herdrukken zijn achtereenvolgens al de wijzigingen aanbracht, die wenschelijk bleken. Een aantal gebruikers van de rekenboekjes hebben hun opmerkingen meegedeeld aan den schrijver, die er een nuttig gebruik van gemaakt heeft, zoodat in alle opzichten aan de eischen der school voldaan is.

Omdat velen van oordeel waren, dat aanvankelijk te veel groote getallen waren opgenomen, is het aantal vraagstukken van dien aard eenigszins verminderd. Maar tevens werd een afzonderlijk stukje (Vierde B) aan het rekenen met groote getallen gewijd.

Voor het berekenen van oppervlakken en inhouden behelzen de twee stukjes over vormleer een leergang, die zoo geleidelijk is als men slechts wenschen kan.

Het aanleeren van 't metrieke stelsel gaat van den beginne af hand aan hand met het aanleeren van het talstelsel.

De laatste herdrukken bleken geen wijziging meer te behoeven en gedeeltelijk zijn de rekenboekjes nu gestereotypeerd.

REKENBOEKEN.

De rekenboeken voor de lagere scholen van den heer J. Versluys, zijne Verzamelingen en zijn Vraagstukken bij 't onderwijs in de Vormleer heb ik op mijne school ingevoerd, zoodra ze verschenen waren. De naam J. V. was voor mij een waarborg, dat ik iets goeds zou ontvangen. Ik heb mij niet bedrogen. Sinds de invoering dier rekenboeken leeren alle kinderen — zelfs die onregelmatig de school bezoeken — flink en met oordeel rekenen. De handleiding bij het rekenonderwijs heeft ook het hare hiertoe bijgedragen, en daarom verheug ik mij in de verschijning van een tweeden vermeerderden en verbeterden druk.

A. G. E. Hoijer,
Hoofdonderwijzer te Wehl.

De heer Boswijk, hoofdonderwijzer te Arnhem, drukte zijne bevinding na het gebruik der rekenboekjes van J. Versluys uit, door te zeggen *dat de schrijver een pad heeft aangewezen zoo weinig hobbelig, dat ook zwakke beenen het gaarne en gemakkelijk bewandelen.*

TWEEDE VERZAMELING.

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN OVER DE GETALLEN TOT DUIZEND EN HOOGER.

Derde druk. Prijs 16 *Cent.*

Uit de voorrede:

„Van verschillende zijden is de opmerking gemaakt, dat mijne rekenboekjes te weinig vraagstukken bevatten, waarbij ter beantwoording van een zelfde opgave twee of meer verschillende bewerkingen noodig zijn. Vult men die leemte aan, door de leerlingen een of twee stukjes van een ander stel rekenboeken, dat beter aan dien eisch voldoet, te laten doorwerken, dan ontmoeten zij hierbij weer te veel vraagstukken, die ver beneden hun kracht gaan, als zij eenmaal het overeenkomstige stukje van mijne reeks hebben doorgewerkt. Om nu aan die bezwaren tegemoet te komen, wordt hierbij een rekenboekje in het licht gezonden, dat bestemd is, gebruikt te worden, nadat het vierde stukje geheel of gedeeltelijk is doorgewerkt."

DERDE VERZAMELING.

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN OVER DE GEWONE EN TIENDEELIGE BREUKEN.

Tweede druk. Prijs 16 *Cent.*

REKENBOEKJES,

DOOR

J. VERSLUYS.

In „*Ons Onderwijs*" van 12 November 1877, zegt de heer W. Degenhardt van deze Rekenboekjes o. a. het volgende:

„Alleen dit bezwaar is aan dien grooten toevloed verbonden, dat menigmaal de degelijk goede, de uitstekende werkjes niet tot hun recht komen, of althans minder de aandacht trekken dan zij inderdaad verdienen. Of dit het geval is met de serie rekenboekjes voor de lagere school, door den heer Versluys in het licht gegeven, zou ik niet kunnen zeggen. Ik geloof het zelfs niet. In allen gevalle zouden zij dat in geen enkel opzicht verdienen. Langzaam en geleidelijk opklimmend, naar een wel overdacht plan samengesteld, omvatten zij de stof, die van de allereerste beginselen tot daar waar het lager onderwijs gezegd kan worden zijn eindpaal te hebben, noodig is. Die leerstof wordt onder de hand van den kundigen bewerker tevens het middel tot zelfstandig denken en werken, zoodat naar mijne meening, de leerling, die geregeld deze serie heeft doorgewerkt, geacht mag worden ruimschoots in dat vak toegerust te zijn met de kennis die de lagere school kan aanbrengen.

„Het is zeer licht mogelijk dat deze of gene het in enkele onderdeelen met den schrijver niet eens is, of langs een anderen weg meent zijn doel te bereiken, — maar zeker is het dat wij in de serie rekenboekjes van den heer Versluys een aanwinst hebben voor onze schoollitteratuur in dit hoogst belangrijk vak, en dat een oordeelkundig gebruik van deze werkjes de meest gewenschte vruchten zal kunnen geven. Ofschoon ons Blad geen recenseerend blad is, meen ik dat het daarom wel van tijd tot tijd op enkele bij uitstek goede schoolwerkjes de aandacht mag vestigen. Ik heb dit met deze enkele regels trachten te doen."

HANDLEIDING BIJ HET REKENONDERWIJS en REKENBOEKJES,

door J. VERSLUYS.

Wat velen in den arbeid van den heer V. vooral zal toelachen, is zijn nauwkeurigheid op kleinigheden. Immers, al wordt voor velen het vak er niet aanlokkelijker door, en al vind ik de aanvechting om het te vergeten, vooral bij jonge onderwijzers, zeer natuurlijk, bagatellen zijn het voornamelijk, die de aandacht van den onderwijzer der lagere school voortdurend in beslag nemen. Daarom is het een groote deugd in een handleiding als deze, wanneer daarin op al die kleinigheden der praktijk, wier som zoo allerbelangrijkst is, behoorlijk gelet wordt. Al dadelijk komt deze eigenschap uit, als de schrijver in het 2e deel der handleiding het aanleeren der cijferteekens bespreekt en de nieuwe hulpmiddelen nagaat, die noodig worden bij de beschouwing van hoeveelheden, grooter dan tien. Of men toch bij het leeren der cijfers deze moet voorstellen als een verkorte schrijfwijze voor den *naam* der hoeveelheid, dan of het teeken zoo min mogelijk van de voorstelling der hoeveelheid gescheiden moet worden, — of de ballen van het telraam een of twee kleuren moeten hebben, dan of ze veelkleurig mogen zijn, — of het noodig is, dat alle ballen, of alleen die, welke de behandelde hoeveelheden voorstellen, zichtbaar zijn, — of bij de getallen boven 10 de aangroeiing uit het voorgaande plus eén eenheid, dan wel de voorstelling: *tien* plus een zeker aantal hoeveelheden op den voorgrond moet staan, — ziedaar vragen, die een oppervlakkig onderwijzer of een oningewijde niet anders dan als nesterijen kan beschouwen, de moeite niet waard om er zich 't hoofd over te breken, maar die juist het bewijs leveren, dat de heer V. zich zijn taak niet te gemakkelijk heeft gemaakt en nauwlettend acht gegeven heeft op de wijze, waarop kinderlijke hersenen nieuwe voorstellingen opnemen.

. . . .

De eerste § van het bij dezen kring behoorende 3e stukje, waarin de schrijver uit den *decimeter* het begrip *meter* ontwikkelt, schijnt, naar ik opgemerkt heb, sommigen af te schrikken. Zij zien dan echter over 't hoofd, dat de decimeter, nadat de leerling den meter duidelijk heeft leeren kennen, voorloopig afgedaan heeft, en alleen tot dat doel heeft moeten dienen. Nu stem ik wel toe, dat het wat al te nauwgezet is, om langs dezen omweg het kind tot het begrip van den meter te willen brengen; een meter hebben de kinderen meer gezien dan een decimeter. Maar overigens acht ik het een gelukkigen greep van den schrijver om de ontwikkeling van het metriek stelsel gelijken tred te doen houden met de opklimmende hoeveelheden, die langzamerhand binnen het voorstellingsvermogen van den leerling vallen. In den 3en kring valt alzoo de kennismaking met het woord *deka*, in den 4en (1—1000) met *hekto* en *kilo* en eindelijk het overige. Door deze verdeeling vervallen wellicht de bezwaren van hen, die nog altijd met de oude namen aanvangen en zoodoende de bedoeling van de Wet van '69 tegenwerken. Ik weet wel, dat hierop gewoonlijk het antwoord volgt: „later komt dat wel terecht." Maar wie zoo spreekt, moet zich, meen ik, in de meeste gevallen bedrogen vinden. Men herinnert zich een voorwerp in den regel het eerst met den naam, waaronder men het heeft leeren kennen. Leerlingen, die dus de maten en gewichten aanvankelijk onder de oude namen hebben geleerd, zullen, als zij de nieuwe benamingen *moeten* gebruiken, zich die wel herinneren, maar 't zal hun *moeite* kosten, omdat de oude naam hun 't eerst voor den geest komt en zij dien dus vooraf bij zich zelf moeten *vertalen*. Bij voorkeur zullen zij 't daarom niet doen, evenmin als men zonder noodzakelijkheid gaarne in een vreemde taal spreekt.

De 4e kring (1—1000 en hooger) en het daarbij behoorende rekenboekje hebben mij tot geen bijzondere opmerkingen aanleiding gegeven. Helderheid en ordelijke bewerking laten niets te wenschen over en als 't voorgaande met zorg is behandeld, zal men bemerken, dat het zwaarste werk achter den rug is en 't weinig moeite kost op den stevig gelegden grondslag voort te bouwen.

Juni, 1876. C. H. DEN HERTOG.

Werken van J. Versluys,

OVER

PERSPECTIEF

EN

TEEKENONDERWIJS.

Perspectief, Eerste deel. Derde druk . . . . *f* 2,50
Tweede 〃 Tweede 〃 . . . . 〃 2,50
Derde 〃 . . . . 〃 3,—

Handleiding bij bet eerste teekenonderwijs . . . . . 〃 1,60

Teekenvoorbeelden, bestemd om in handen der leerlingen gegeven te worden, I—IX. Ieder . . . . . . 〃 0,20

Teekenschriften I met vierkanten ter grootte van 1 vierkanten centimeter . . . . 〃 0,10
〃 II met stippen op afstanden van 1 centimeter . . . . 〃 0,12^5
〃 III zonder lijken of stippen . . . . . 〃 0,10

Teekenleien, aan de eene zijde met ruiten van 1 vierkanten centimeter, aan de andere zijde met stippen op afstanden van 1 centimeter . . . . 〃 0,25

WANDPLATEN, ten dienste van het teekenonderwijs.
Eerste reeks, 12 platen. . . . . *f* 4,—

PERSPECTIEF

DOOR

J. VERSLUYS.

EERSTE DEEL.

Derde Druk.

PRIJS . . . . *f* 2,50.

Het aantal figuren is vermeerderd in dezen herdruk, evenals het aantal vraagstukken. Op verschillende plaatsen zijn kleine verbeteringen aangebracht. Voor het in perspectief brengen van den bol is een betere constructie gegeven. Ook is het hoofdstuk over schaduwbepaling bij kaarslicht aanmerkelijk uitgebreid. De gevallen, dat de kaars achter den aanschouwer staat, zijn uitvoerig besproken, vooral het opmerkelijke geval, dat de perspectieven der lichtstralen bij kaarslicht evenwijdig zijn.

Aan het einde worden de werkstukken opgegeven, die in de drie verschillende jaren zijn opgegeven bij het aktenexamen voor teekenen lager onderwijs.

Ondanks die uitbreidingen is de prijs onveranderd gebleven.

Het boek bevat 140 bladzijden druks groot 8o, met 136 houtsneden tusschen den tekst, waarvan sommige een halve bladzijde en meer beslaan.

De eerste helft van dit deel kan als voldoende worden beschouwd voor hen, die examen voor de hoofdakte willen doen.

Het geheele deel is voldoende voor hen, die de afzonderlijke akte voor het teekenen bij het lager onderwijs willen behalen.

Aan het einde komen al de werkstukken voor, die in de jaren 1881, 1882 en 1883 zijn opgegeven bij het examen van teekenen lager onderwijs.

PERSPECTIEF

DOOR

J. VERSLUYS.

DERDE DEEL. — Prijs f 3,00.

Dit bestaat uit een deel tekst van 64 bladzijden groot 8°. en Atlas van 24 Platen in kwarto.

INHOUD:

Het verdeelen van lijnen.
Ontoegankelijke punten.
Het snijden van rechte lijnen en platte vlakken.
Doorsneden van gebogen oppervlakken.
Schaduwen aan gebogen oppervlakken op den grond.
Perspectief van den bol.
Perspectief van gewelven.
Schaduwen op gebogen oppervlakken.
Iets over schaduwen en over terugkaatsing en breking van licht.
Verschillende werkstukken.
Gemengde vraagstukken.

In het *Nieuwe Schoolblad* leest men over dit werk o. a. het volgende:

Dit werk verscheen voor een paar maanden, nadat kort te voren de derde druk van het eerste deel het licht had gezien. Een derde druk van een leerboek over perspectief in ons land (de eerste verscheen in 77 en de tweede in 81) in zoo korten tijd is een bewijs, dat èn het boek voldoet aan de vereischten, èn de studie der perspectief toeneemt. Dit laatste is zeker een gevolg van de hoogere eischen, die men bij het examen in het teekenen voor dit vak stelt. Men kan tegenwoordig niet meer volstaan met het perspectief-ideaal van vroeger: een kruis of eenig ander voorwerp met tal van evenwijdige lijnen in perspectief te brengen.

. . . .

Met belangstelling nam ik dit derde deel met atlas ter hand, met ingenomenheid heb ik er mede kennis gemaakt. De theorie is eenvoudig, duidelijk en streng, zooals wij van den schrijver gewoon zijn. De platen zijn nauwkeurig en net geteekend. Aankomenden teekenaars en schilders, en vooral hun, die voor het examen-teekenen studeeren, zij dit deel niet ter kennisname, maar ter ernstige doorwerking bijzonder aanbevolen.

Rotterdam. A. F. FEHMERS.

Bij den regelmatigen zeshoek is door stippellijnen de eenvoudigste manier aangewezen om zulk een figuur te teekenen; nl. door samenvoeging van 6 gelijkzijdige driehoeken. In den regel geeft men voor den zeshoek een minder eenvoudige en dus ook minder doelmatige samenstelling aan.

De ellipsen zijn niet samengesteld uit cirkelbogen, wat altijd onzuivere lijnen geeft.

Om in overeenstemming te blijven met de vooropgestelde beginselen worden geen andere bladvormen dan gestiliseerde opgenomen.

Deze eerste reeks kan ook dienen tot aanvulling van andere verzamelingen.

Het is de bedoeling, dat aan de eerste plaat het teekenen van staande en liggende lijnen voorafgaat. Een afzonderlijke plaat hiervoor te nemen, scheen niet noodzakelijk.

De tweede reeks zal geen hoogere nummers bevatten.

In de volgende reeksen zullen ook platen voorkomen met twee of meer kleuren.

Daar in de platen, zooals men het tegenwoordig op goede gronden verlangt, verband is aangebracht tusschen teekenonderwijs en versieringskunst, kunnen ze ook geschikt worden geacht voor burger-avondscholen en ambachtscholen.

Voor normaalscholen en kweekscholen, waar het teekenonderwijs van den aanvang af moet begonnen worden, leveren de platen het voordeel op dat ze een geregelden leergang vormen, dien de toekomstige onderwijzer later in de school kan volgen.

WERKEN OVER VORMLEER

DOOR

J. VERSLUYS.

Handleiding bij het onderwijs in de vormleer. *Vierde druk.* *f* **1,50.**

Dit boek is bestemd tot leerboek voor kweekscholen en normaalscholen en tot handleiding bij het onderwijs in de lagere school.

Vraagstukken bij het onderwijs in de vormleer op de lagere school.

Eerste stukje. *Vierde druk* . . . . „ **0,20.**
Tweede „ *Derde* „ . . . . „ **0,20.**

Antwoorden op de vraagstukken in deze 2 rekenboekjes, samen . . . . „ **0,16.**

Vraagstukken over vormleer vooral ten dienste van kweekscholen en normaalscholen. *Tweede druk* . . . . . „ **0,75.**

Antwoorden op de vraagstukken over vormleer voor normaalscholen . . . . „ **0,16.**

Voorwerpen ten dienste van het onderwijs in de vormleer, vervaardigd op aanwijzing van J. Versluys in aansluiting bij zijn handleiding.

Eerste stel. . . . . „ **16,00.**
Tweede stel . . . . „ **7,50.**

HANDLEIDING

BIJ HET

ONDERWIJS IN DE VORMLEER

DOOR

J. VERSLUYS.

Prijs *f* 1,50.

Op blz. 12 van zijne brochure over de leervakken van het lager onderwijs, enz. zegt Dr. J. Zaaijer Az., onder anderen het volgende: „Ofschoon ik vroeger voor de afschaffing der vormleer gestemd was, moet ik bekennen, dat ik thans zou terugdeinzen om daartoe mede te werken, vooral na kennis genomen te hebben van de wijze, waarop de heer Versluys het onderwijs in dit vak opvat en uitwerkt....... Tegenover de meermalen vernomen bewering, door den Minister aangevoerd, dat het onderwijs in de vormleer veelal tot min duidelijke begrippen omtrent wiskundige waarheden aanleiding geeft, staat de verklaring van den heer Versluys, wiens woorden in dezen zeker groot gezag hebben, dat de vormleer in haar geheel kan beschouwd worden als een stevigen en onmisbaren grondslag van wetenschappelijk onderwijs in de meetkunde."

Wij bevelen deze handleiding bij het onderwijs in de vormleer in ieders aandacht aan, elken onderwijzer noodigen wij tot eene kennismaking uit en mocht iemand nog twijfelen aan hetgeen eigenlijk vormleer is, hij zal de handleiding van den heer J. Versluys niet onbevredigd ter zijde leggen.

24 Februari 1877. *Ons Recht.*

Door dezen zijnen arbeid bewijst de heer Versluys tegenover elk, die de vormleer van de lijst der leervakken eener lagere school zou willen schrappen, dat zij recht van bestaan heeft, en wèl als eene „aanschouwelijke meetkunde," „die uit het gebied der meetkunde zooveel bevat, als noodig is, om, langs den weg der aanschouwing, de leerlingen bekend te maken met die waarheden der meetkunde, welke in het praktisch leven voor ieder noodig zijn," of om hen voor te bereiden tot het beoefenen van de meetkunde in eigenlijken zin.

Wie de vormleer niet kent of niet genoegzaam op de hoogte is van haar leerstof, den leergang, daarbij te volgen, de leerwijze, daarbij voegende, kan daaromtrent in deze uitgewerkte Handleiding, rijk aan menig voorbeeld, vele voor- en toelichting, vinger- en terechtwijzingen, op- en aanmerkingen, veel leeren. Wie met de vormleer reeds veel wist te doen, zal omtrent leergang, leerstof en leerwijze nog wel wat vinden, dat hem meer in staat stelt; want de schrijver heeft uit oud en nieuw, op eigen akker en eens anders grond bij landgenoot en vreemde veel saamgelezen, en dit in een schoonen bundel recht goed samengebonden.

De Wekker, 20 Januari 1877. v. W. v. K.

Het Nieuwe Schoolblad

ONDER REDACTIE VAN

J. VERSLUYS. — Prijs per kwartaal f 1,50.

Dit blad heeft het voordeel, dat het wordt geredigeerd door iemand, die op de hoogte is van het Lager en het Middelbaar Onderwijs. — Dat het te Amsterdam verschijnt, levert voordeel op ten aanzien van den spoed der berichten. — De prijs is per jaar *f* 2,00 minder dan van de andere grootere onderwijsbladen.

Een nieuw onderwijsblad.

Het aantal onderwijs-organen in Nederland is met één vermeerderd: op 5 Januari 1883 is verschenen het eerste nommer van „*Het Nieuwe Schoolblad.*" Wij begroeten het met ingenomenheid, omdat de heer J. Versluys met de redactie zich heeft belast. Die naam wekt vertrouwen en wettigt goede verwachting.

Het Volksblad.

(ONDER REDACTIE VAN MR. A. KERDIJK.)

De weekbladen zijn alweer met één vermeerderd: *Het Nieuwe Schoolblad* (Amst. W. Versluys, *f* 6 p. j.), opgericht en geredigeerd door J. Versluys, die ook indertijd *Het Schoolblad* oprichtte. Indien er steeds voldoende werkkrachten gevonden worden om dit blad zóo in te richten, zal het een schoone toekomst hebben. Geen der andere schoolbladen levert éen No. per jaar, dat met dit No. 1 zou kunnen vergeleken worden. Met groote belangstelling zien we de volgende Nrs. tegemoet. *Portefeuille.*

Ons Recht leverde naar aanleiding van de verschijning van *'t Nieuwe Schoolblad* een hoofdartikel, dat aldus aanvangt:

„Er is in '83, te gelijk met het plakzegel, een nieuw *Schoolblad* bijgekomen en het heet ook zoo. De hoofdredacteur is een oude bekende en, als wij ons niet vergissen, dezelfde die aan het hoofd stond van het thans oude *Schoolblad* in „deszelfs" bloeitijd. Dit voorspelt veel voor „*Het Nieuwe Schoolblad*", doch niet veel goeds voor het oude. Het eerste nommer bevalt ons wel en steekt reeds gunstig af, door onbekrompenheid in keuze van mededeelingen, gezond inzicht der toestanden en door ontwassenheid aan partij-kinderachtigheden, bij de overige liberale onderwijspers. Deze zal b. v. zich wel nauwgezet wachten voor het aanhalen van 't geen Katholieke, antirevolutionaire of conservatieve couranten en tijdschriften, binnen- of buitenlandsche af en toe merkwaardigs te berde brengen. Zij zal ook angstvallig vermijden gewag te maken van het nieuwe *Schoolblad*. 't Is alsof de *Wekker* en soortgelijke geschreven worden voor lezers, die cellulair zitten opgesloten en niets mogen vernemen dan hetgeen hun lijfblad oordeelt dat goed voor hen is of althans niet schadelijk."

